

1. 静電場の基本法則

第1回目の授業で述べたように、電磁気学の基本法則は次の Maxwell 方程式、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

ただし、

$\mathbf{E}$: 電場、 ρ_e : 電荷密度、 ϵ_0 : 真空の誘電率

$\mathbf{B}$: 磁束密度、 $\mathbf{j}$: 電流密度、 μ_0 : 真空の透磁率

に集約されている。第I編のベクトル解析で、ベクトル場の発散、回転について学んできた。以前に比較すると、これら Maxwell の方程式について、より親しみがもてるようになってきていると思う。第1学年で学んだ電磁気学、そして、第I編初等ベクトル解析の知識をもとに、第II編以降では電磁気学について、さらに理解を深めていく。

この授業における我々の最終目標は、主に以下3点である。

- ・マックスウェル方程式を書き下すことができること。
- ・各方程式が表す物理法則/物理現象がしっかり理解ができていること。
- ・電磁気学の基本的な問題が、自分自身で解けること。そのための数学的な基礎力を身につけること。

このような目標を踏まえ、まず本編では手始めに、上の Maxwell 方程式について、電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度 $\mathbf{B}$ が時間に依存しない場合 ($\partial/\partial t = 0$) を考える。第I編 §2 で説明した“定常場”に相当する。このとき、上の Maxwell の方程式は、

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$(1.1)'$ $(1.2)'$
---	----------------------

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$	$(1.3)'$ $(1.4)'$
---	----------------------

となる。電場と磁束密度は、各々、独立な方程式の組によって記述されることがわかる。従って、定常場を扱う限り、電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ とは、独立に考えることができる。このような定常場の問題を、ここでは、各々、“静電場”、及び“静磁場”と呼ぶ。このうち、本編では“静電場”について学ぶ。

静電場の基本法則として、すでに第 1 学年で学んだ“クーロンの法則”がある。実は、Maxwell の方程式のうち、式(1.1)′は、クーロンの法則を別の形で表現したものであることを以下で学ぶ。

また、静電場における重要な概念として、“電位（静電ポテンシャル）”の概念がある。すでに、第 I 編で学んだように、任意のベクトルの回転 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ がゼロであるとき、ベクトルはスカラーの勾配として、 $\mathbf{A} = \nabla \phi$ と表された。静電場では、電場の回転は式(1.1)′からゼロとなる。従って、静電場を考える限り、電場は電位勾配によって、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ と表すことができる。すなわち、静電場は第 I 編で学んだ渦なし場の典型的な例である。以下、§ 4 では電位の概念について詳しく学ぶ。

このように本編では、方程式 (1.1)′ 及び (1.2)′ が表す静電場の基本法則とその物理的意味について考え、静電場に対する理解をより確かなものにする。

2. クーロンの法則

2. 1 クーロンの法則

クーロン力

二つの電荷の間に働く力をクーロン力（**Coulomb Force**）と呼ぶ。

クーロンの法則

クーロン力の大きさは、二つの電荷について、その各々の電荷量の積に比例し、電荷間の距離の2乗に反比例する。また、その方向は、二つの電荷間を結ぶ直線の方で、同符号の電荷の場合には、反発力であり、異符号の場合には引力となる。

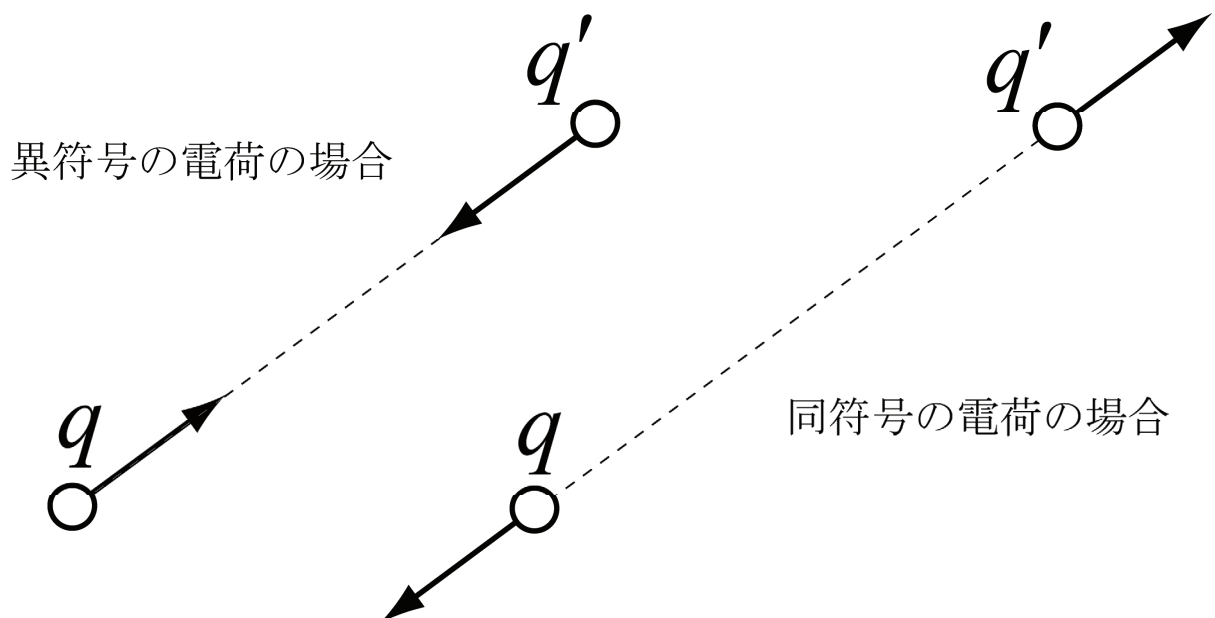


図 2. 1. 1 クーロンの法則

クーロン力の大きさと単位系

二つの電荷の量を、各々、 q 、 q' 、電荷間の距離を r とすると、クーロン力の大きさ F は、

$$F \propto \frac{qq'}{r^2} \quad (2.1.1)$$

となる。比例定数を K で表すことにすると、

$$F = K \frac{qq'}{r^2} \quad (2.1.2)$$

となる。このとき、比例定数 K は、力 F 、距離 r 、さらに、電荷 q 、 q' の単位をどのように選ぶかにより異なる。

(MKSA 単位系)

MKSA 単位系では、長さ、質量、時間、および、電流を基本量として、単位系を組み立てる。長さ、質量、時間の基本単位として、各々、m、kg、s に選ぶ。従って、力の単位は、N である。また、電流の基本単位として、A (アンペア：**Ampere**) を選ぶ。このとき、電荷の単位は C (クーロン：**Coulomb**) であり、“1A の電流が 1 s に運ぶ電荷の量” を 1 C (クーロン：**Coulomb**) とする。

MKSA 単位系では、比例定数 K は、

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{単位 } \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \text{ 或いは } \frac{\text{Vm}}{\text{C}}) \quad (2.1.3)$$

で与えられ、従って、クーロン力の大きさは

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

(2.1.4a)

となる。ただし、

ϵ_0 : 真空の誘電率

$$\epsilon_0 = 8.852 \times 10^{-12} \quad (\text{単位 } \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \text{ 或いは } \frac{\text{Vm}}{\text{C}})$$

である。これから、比例定数 K の値は、おおよそ $K \approx 9 \times 10^9$ となる。従って、クーロン力の大きさは、概略、

$$F \approx 9 \times 10^9 \frac{qq'}{r^2} \quad (\text{単位 } \text{N}) \quad (2.1.4b)$$

から、見積もることができる。

原点の置かれた点電荷とクーロン力

原点に電荷 q が置かれている。このとき、空間の点 $Q(x, y, z)$ に置かれた点電荷 q' に働くクーロン力は、その方向も考慮して、次のように表すことができる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.1.5a)$$

ただし、 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ は点 $Q(x, y, z)$ の位置ベクトルを表す。

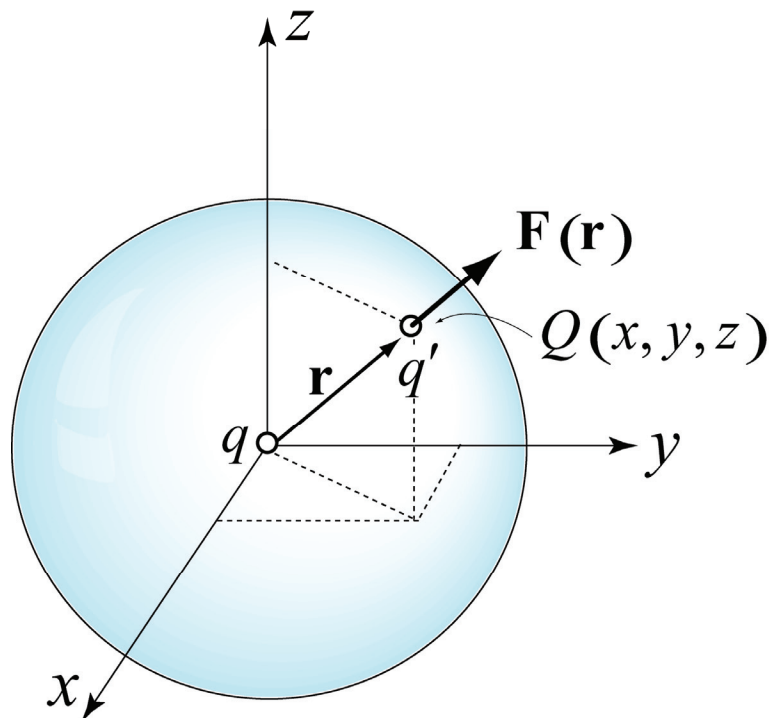


図2. 1. 2 原点に置かれた点電荷によるクーロン力の場合

式(2.1.5)のように、位置ベクトルの方向を向く単位ベクトル ($\mathbf{r}/r$) を用いることにより、方向も含めてクーロンの法則を数学的に表現できる。例えば、原点にある電荷 q が正電荷 ($q > 0$) の場合を考える。もし、 $q' > 0$ であれば、 q' に働く力の方向は、原点から点 Q に向かう方向となる $[\mathbf{F} // (\mathbf{r}/r)]$ 。すなわち、 q' に働く力は、 q から反発する向きになる。逆に、 $q' < 0$ の場合には、力は点 Q から原点に向かう $[\mathbf{F} // (-\mathbf{r}/r)]$ 。すなわち、吸引力を表す。

原点にある電荷 q が負電荷 ($q < 0$) の場合にも、上と同様にして式(2.1.5a)はクーロン力の方向を正しく表していることが簡単に確かめられる。

問1 $1/r^2$ に比例する力として、万有引力がある。

$$F = G \frac{mm'}{r^2}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \approx 7 \times 10^{-11} \left(\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \right)$$

陽子(proton)及び電子(electron)の質量と電荷は、表のようになる。水素原子では、陽子と電子の平均的な距離は、おおよそ、 $r = 5.3 \times 10^{-11} \text{m}$ である。このとき両者に働くクーロン力と万有引力の大きさを比較せよ。

	Mass (kg)	Charge (C)
proton	1.67×10^{-27}	1.6×10^{-19}
electron	9.11×10^{-31}	1.6×10^{-19}

問2 あけぼの君とボブ君が10円玉を1枚ずつ持って立っている。二人の距離(10円玉の距離)は、10mである。10円玉は銅でできており、一枚約5gである。銅1g当たりの原子数は、約 10^{22} 個である。原子は原子核と電子からなっており、通常は、正電荷と負電荷がバランスし、電氣的に中性と考えられる。

- (1) もし、そのバランスが崩れ、1%電子が多くなったすると、二人の間(正確には10円玉)には、おおよそ、どれだけの反発力が働くか？
- (2) あけぼの君の体重は、200kgである。上で求めた反発力の大きさは、あけぼの君に働く重力の大きさの何倍か？あるいは、何分の1か？ただし、重力加速度を $g = 9.8(\text{m/s}^2) \approx 10(\text{m/s}^2)$ として計算せよ。

問3 空間の点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 、点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ に、各々、点電荷 q_1 、 q_2 がある。このとき、各点の位置ベクトルを、 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 、また、 q_1 に働くクーロン力を $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1)$ 、 q_2 に働くクーロン力を $\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)$ とする。

(1) $\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)$ は、次のように表されることを示せ (第 I 編 § 1. 2 問 4 参照)。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} \quad (2.1.5b)$$

ただし、

$$r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (2.1.5c)$$

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (2.1.5d)$$

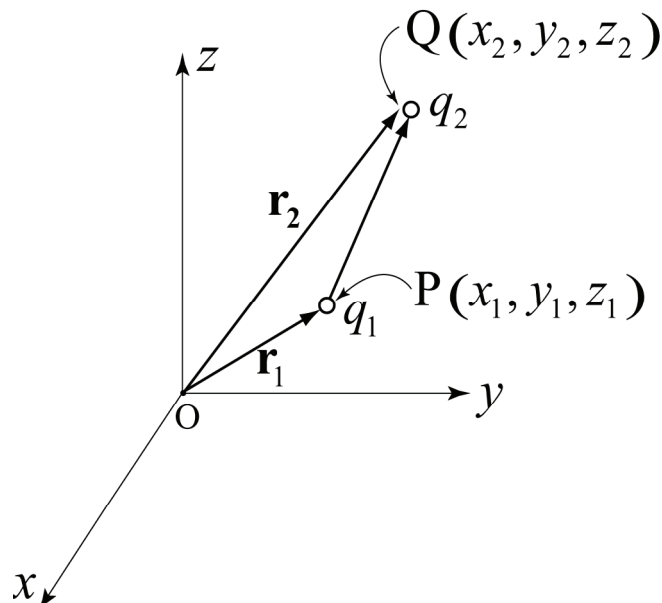
*単位ベクトル $\mathbf{e}_{12}$ は、ファインマンの教科書の定義と反対であることに注意。

すなわち、ここでは、点 P (添え字 1) から点 Q (添え字 2) に向かう単位ベクトルを $\mathbf{e}_{12}$ と定義する。

(2) 式(2.1.5b)のようにクーロン力を、ベクトルを用いて表したとき、 $q_1 < 0, q_2 < 0$ の場合には、電荷 q_2 に対する力の向きは、 q_1 はから反発する向きであることを説明せよ。また、 $q_1 < 0, q_2 > 0$ の場合には、電荷 q_2 に対する力の向きは、 q_1 に引き寄せられる向きであることを確かめよ。

(3) $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1)$ は、(1) と同様、位置ベクトルを用いてどのように表されるか？

(4) $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$ 、 $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 1)$ 、 $q_1 = 1C$ 、 $q_2 = -1C$ のとき、 q_2 に働くクーロン力の大きさと方向を求めよ。



2. 2 電場

電場

空間に電荷を持ち込むとき、力を受けるような空間のことを“電場”と呼ぶ。

空間の各点で、電場は大きさと方向を持ち、第 I 編 2. 1 で説明したベクトル場と考えることができる。電場の大きさと方向は、次のように定義される。

大きさ：単位電荷（1C）あたり受ける力の大きさ

方向：電荷に働く力の方向。ただし、正電荷の受ける力の向きを、電場の正の向きにとる。

すなわち、電場が存在する空間に電荷を試験的に持ち込んだとき、この電荷は

$$\mathbf{F} = q'\mathbf{E} \quad (2.2.1)$$

の力を受ける。 $q'=1\text{C}$ のとき、 $\mathbf{F}=\mathbf{E}$ となる。 $q'<0$ のとき、電荷に働く力の向きと電場の向きとは、互いに逆向きである。

電場の単位

電場の大きさの単位は、MKSA 単位系では式(2.2.1)からわかるように、

$$E \text{ の単位 : } \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad (2.2.2a)$$

である。

後に定義する電位差（電圧）の単位 V（Volt）を用いると、電場の単位は

$$E \text{ の単位 : } \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (2.2.3b)$$

となる。

$$(\because \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{Nm/s}}{(\text{C/s})\text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{Am}}, \quad \text{W}=\text{V} \cdot \text{A})$$

原点に置かれた点電荷による電場

前節で考えた原点に置かれた点電荷の場合、空間中の点 $Q(x, y, z)$ における電場は、式(2.1.5a)と式(2.2.1)とを比較して、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.2.4)$$

で与えられる。第 I 編 § 2. 2. 2 の問 9 で考えた点源から湧き出す流体の速度場と同じ形をしている。

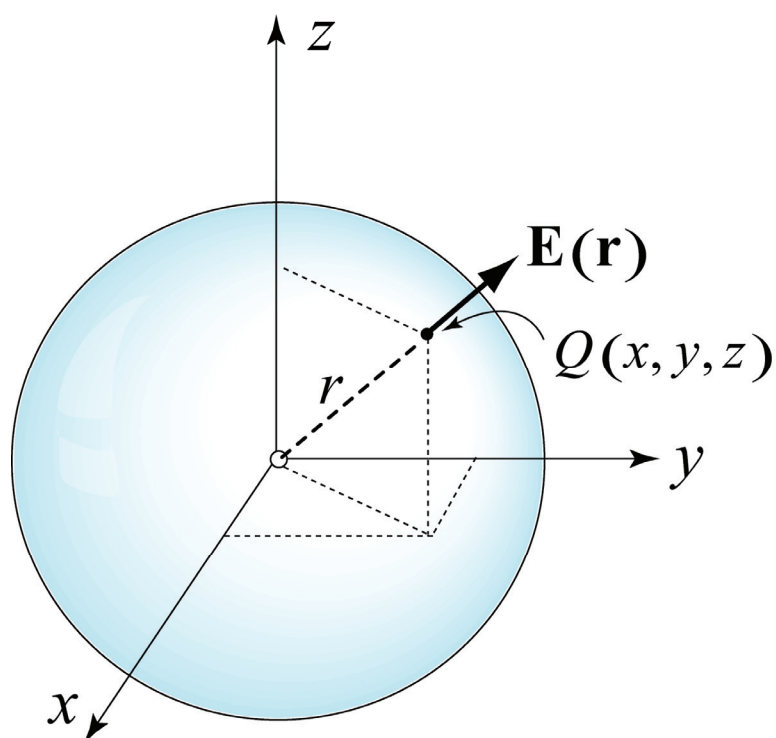


図 2. 2. 1 原点に置かれた点電荷と点 $Q(x, y, z)$ における電場

問1 (電場の成分)

式(2.2.4)で与えられる電場について、次の問に答よ。

- (1) 点 $Q(x, y, z)$ における電場を、 x 成分、 y 成分、 z 成分に分けて考える。

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$$

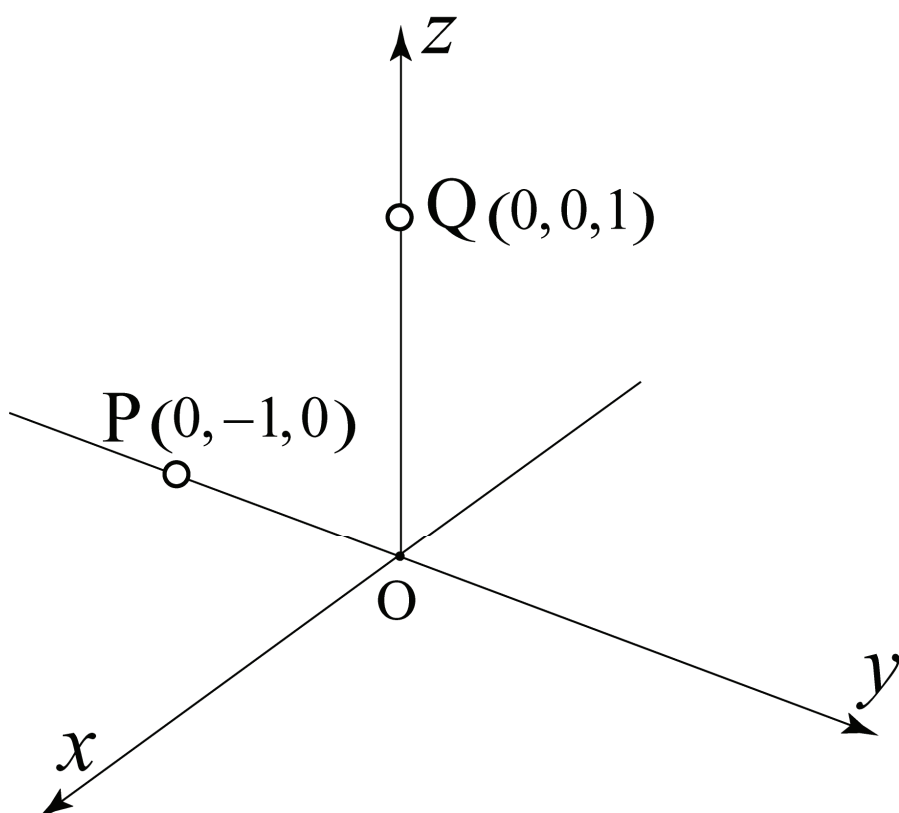
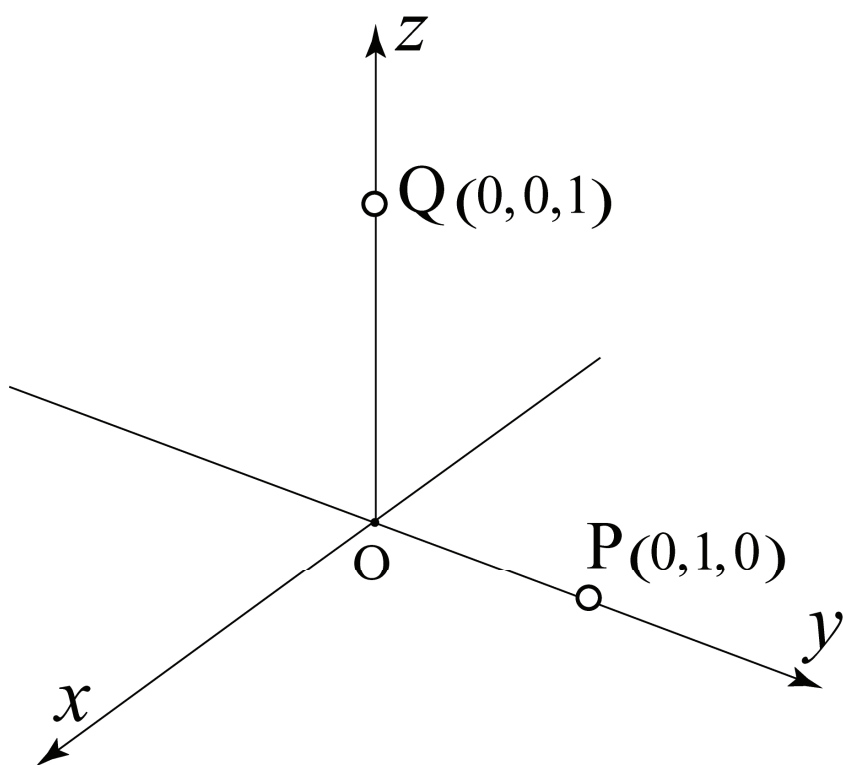
E_x 、 E_y 、 E_z を、空間の座標 (x, y, z) の関数として表せ。

- (2) $z=0$ すなわち (x, y) 平面における電場の様子の概略をベクトル(矢印)図として、示せ。ただし、 $q = 4\pi\epsilon_0$ とする。

問2 (空間の任意の点に置かれた点電荷)

空間の点 $P(x_1, y_1, z_1)$ に q がある。このとき、点 $Q(x, y, z)$ における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を考える。

- (1) 電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を、点 P 及び点 Q の位置ベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}$ を用いて表せ。(前節 問3 参照)
- (2) 電場の x 成分、 y 成分、 z 成分、 E_x 、 E_y 、 E_z を、空間の座標 (x_1, y_1, z_1) 及び (x, y, z) の関数として表せ。
- (3) 点 P の座標が、 $(x_1, y_1, z_1) = (0, 1, 0)$ のとき、点 $Q(x, y, z) = (0, 0, 1)$ における電場ベクトルを、 $x=0$ の平面上に図示せよ。また、 $P(x_1, y_1, z_1) = (0, -1, 0)$ であるときについても図示せよ。ただし、いずれの場合も $q = 4\pi\epsilon_0$ とする。



2. 3 重ね合わせの原理

前節問2では、空間の点 $P(x_1, y_1, z_1)$ に q_1 がある場合について、空間の任意の点 (x, y, z) における電場を考えた。今、空間に N 個の電荷があり、その位置と電荷量が、次のように与えられたとする。

$$\text{点 } P_1 \quad \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad q_1$$

$$\text{点 } P_2 \quad \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad q_2$$

...

$$\text{点 } P_j \quad \mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j) \quad q_j$$

...

$$\text{点 } P_N \quad \mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N) \quad q_N$$

このとき、空間の任意の点 $Q(x, y, z)$ にある電荷 q' に働く力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を考える。力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は、 N 個の電荷が、各々、単独に存在する場合の力、 $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}), \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{F}_j(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{F}_N(\mathbf{r})$ の重ね合わせ (和) として、次のように与えられる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) + \dots + \mathbf{F}_j(\mathbf{r}) + \dots + \mathbf{F}_N(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\mathbf{r}) \quad (2.3.1)$$

ここで、

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j q'}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right) \quad (2.3.2)$$

ただし、 $\mathbf{R}_j$ は j 番目の電荷の位置 (点 P_j) から、考えている点 Q に向かうベクトルであり、式(2.1.5c) より次式で与えられる。

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \quad R_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \quad (2.3.3)$$

従って、電荷 q' をくくり出すと

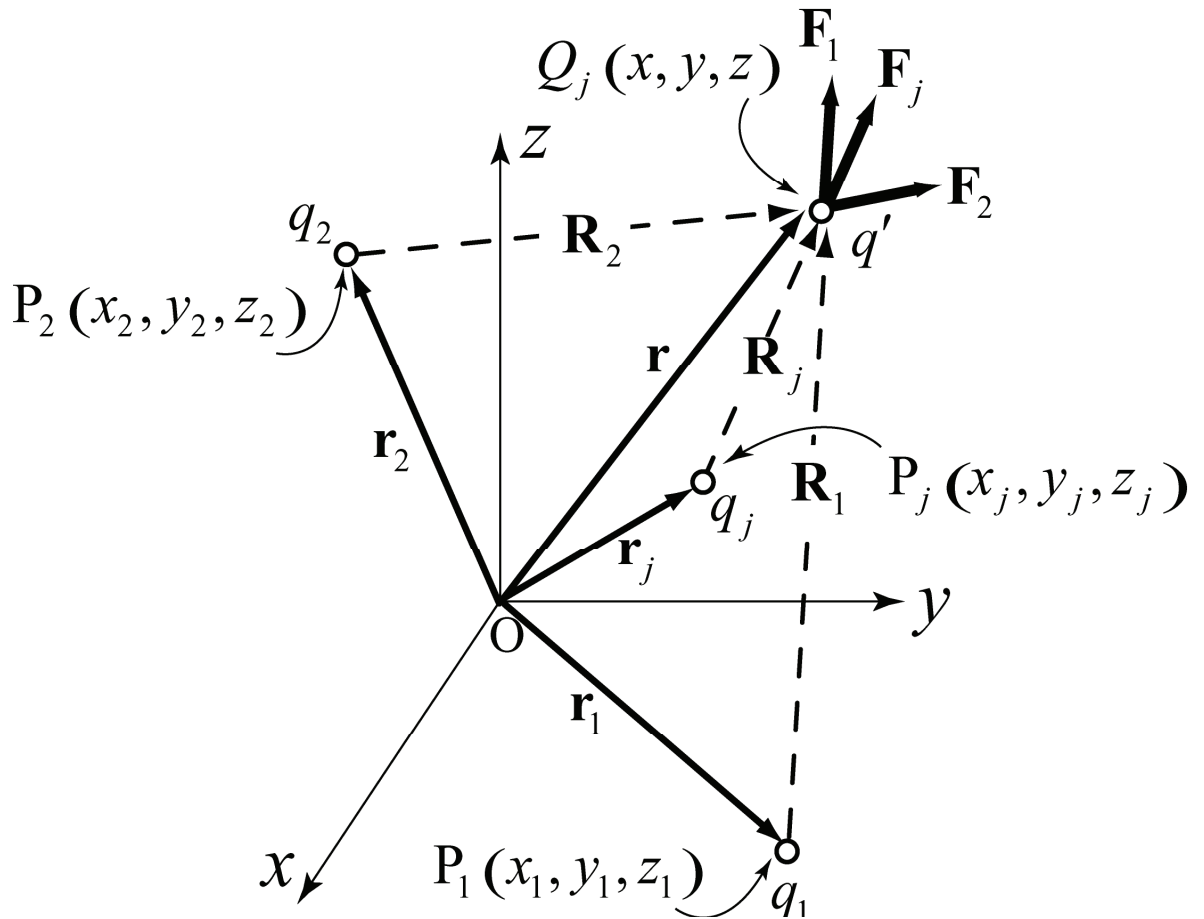
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q' \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.3.1)'$$

ただし、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \cdots + \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) + \cdots + \mathbf{E}_N(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \quad (2.3.4)$$

となり、電場についても重ね合わせの原理が成り立つ。ただし、 $\mathbf{E}_j(\mathbf{r})$ は、j 番目の電荷が、各々、単独に存在する場合の電場であり次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right) \quad (2.3.5)$$



問1 正三角形の各頂点に電荷がある。各頂点の座標は、

$$\text{点 } P_1 \ (x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0) \ 、$$

$$\text{点 } P_2 \ (x_2, y_2, z_2) = (-1, 0, 0) \ 、$$

$$\text{点 } P_3 \ (x_3, y_3, z_3) = (0, \sqrt{3}, 0)$$

で与えられる。また、各頂点の電荷はすべて等しく $q(>0)$ であるとする。次の問に答よ。

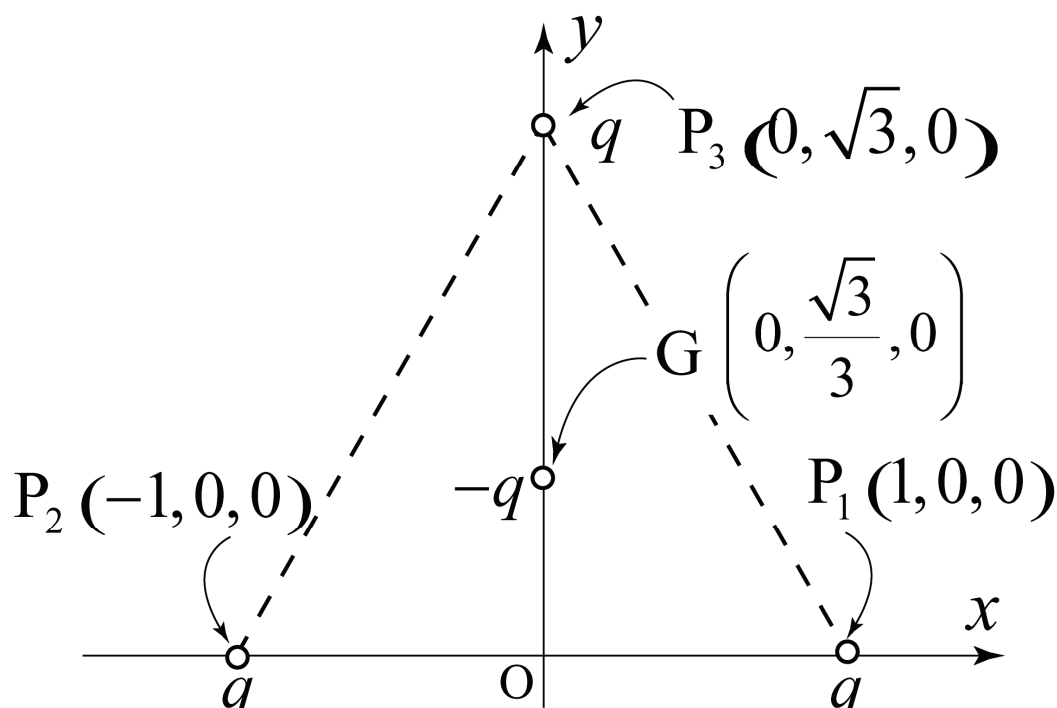
(1) 点 P_1 、点 P_2 、点 P_3 の電荷が、各々、単独で存在する場合に、この正三角形の重心 $G(x, y, z) = (0, \sqrt{3}/3, 0)$ における電場 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}), \mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{E}_3(\mathbf{r})$ を求めよ。

(2) 重ね合わせの原理より、点 P_1 、点 P_2 、点 P_3 の電荷を全て考えたときに、重心の位置における電場を求めよ。また、重心の位置にある負電荷 $-q(<0)$ に対して、力の釣り合い (平衡)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

が成り立っていることを示せ。

(3) 重心から少しだけ y の正方向ずれた位置を考える。この位置で、 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の方向はどちらを向くか？



問2（電荷双極子による電場）

図のように、 z 軸上の点 $(0,0,+d/2), (0,0,-d/2)$ に、二つの電荷 $+q, -q$ が置かれている。次の問に答よ。

- (1) z 軸上の点 $(0,0,z)$ において、電荷 $+q$ による電場 $\mathbf{E}_{+q}$ を求めよ。
- (2) z 軸上の点 $(0,0,z)$ において、電荷 $-q$ による電場 $\mathbf{E}_{-q}$ を求めよ。
- (3) z 軸上の点 $(0,0,z)$ において、電荷 $+q, -q$ による電場 $\mathbf{E}$ を求めよ。
- (4) 電荷から十分離れた点を考える ($z \gg d$)。このとき、(3) で求めた電場の大きさは、

$$qd = (\text{電荷}) \times (\text{二つの電荷間の距離})$$

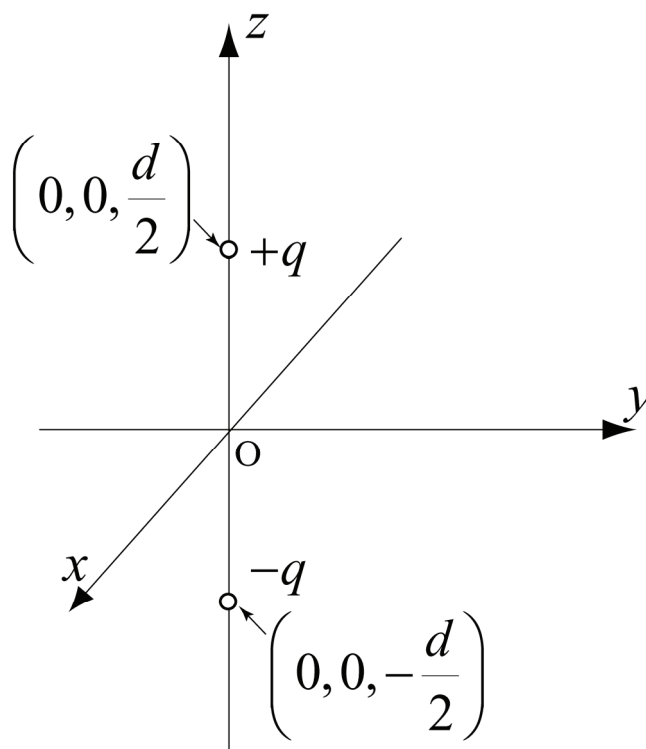
に比例し、 z^3 に逆比例し、

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3}$$

で与えられることを示せ。

ヒント：Taylor 展開を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{[z-(d/2)]^2} &\approx \frac{1}{z^2(1-z/d)} \approx \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{d}{z}\right), \\ \frac{1}{[z+(d/2)]^2} &\approx \frac{1}{z^2(1+z/d)} \approx \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{d}{z}\right), \end{aligned} \quad (d/z) \ll 1$$



問 3 式(2.3.5) で与えられる電場の x 成分は、次式で与えられることを示せ。

$$E_{x_j}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x - x_j)}{[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2]^{3/2}}$$

従って、 N 個の電荷がある場合、全ての寄与を重ね合わせた電場、式(2.3.4)の x 成分は、

$$E_x(x, y, z) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x - x_j)}{[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2]^{3/2}}$$

となることを確かめよ。

2. 4 電荷密度

電荷密度

空間の点 $P_j(x_j, y_j, z_j)$ を囲む微小体積 ΔV_j の内部に多数の電荷が存在する。その全体の電荷量を Δq_j とする。この微小体積内で電荷の分布は、ほぼ一様とみなす。このとき、電荷密度を次の式で定義する。

$$\boxed{\rho(x_j, y_j, z_j) = \frac{\Delta q_j}{\Delta V_j}} \quad (\text{単位: } \frac{\text{C}}{\text{m}^3}) \quad (2.4.1)$$

逆に、点 $P_j(x_j, y_j, z_j)$ を囲む微小体積 ΔV_j に存在する電荷量 Δq_j は、電荷密度 $\rho(x_j, y_j, z_j)$ を用いて

$$\boxed{\Delta q_j = \rho(x_j, y_j, z_j) \Delta V_j} \quad (2.4.2)$$

となる。

このとき、 Δq_j による電場は、式(2.3.5)から

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_j}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right)$$

上で定義した電荷密度を用いると、式(2.4.2)より

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x_j, y_j, z_j)}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right) \Delta V_j \quad (2.4.3)$$

電荷の存在する領域が、このような N 個の微小体積に分割されているとする。このとき、空間の任意の点 (x, y, z) における電場は、式(2.3.4)と同様にして重ね合わせの原理から

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x_j, y_j, z_j)}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right) \Delta V_j \quad (2.4.4)$$

で与えられる。

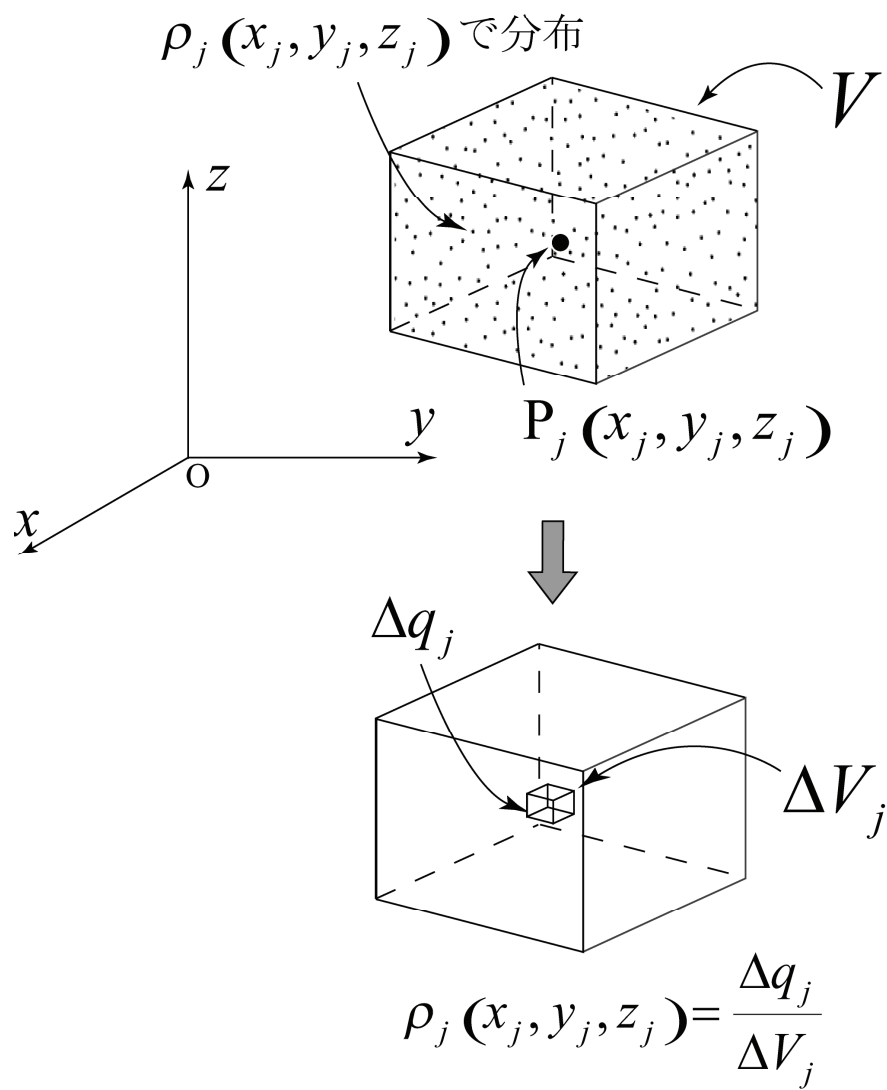


図 2. 4. 1 連続的な電荷分布

従って、N を十分大きくとった極限では、この和は次の積分として、

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x_j, y_j, z_j)}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right) dV_j \quad (2.4.5)$$

と表すことができる。ただし、積分は電荷を含む全空間にわたって行う。
このままでは抽象的でわかりにくい。3 辺の長さが、各々、 dx_j, dy_j, dz_j の直方体をした微小体積を考えると

$$dV_j = dx_j dy_j dz_j \quad (2.4.6)$$

また、式(2.3.3)より

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j = (x - x_j)\mathbf{i} + (y - y_j)\mathbf{j} + (z - z_j)\mathbf{k} \quad ,$$

$$R_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| = [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2]^{1/2}$$

より、電場の x 成分は

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x_j, y_j, z_j)(x - x_j)}{[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2]^{3/2}} dx_j dy_j dz_j \quad (2.4.7)$$

で与えられる。

問 1 式(2.4.5)について、電場の y 成分、 z 成分についても、式(2.4.7)のような形式で表せ。

問 2 (線状電荷と線電荷密度)

電荷が線上に分布する場合、線電荷密度は単位長さあたりの電荷として、次のように定義される。

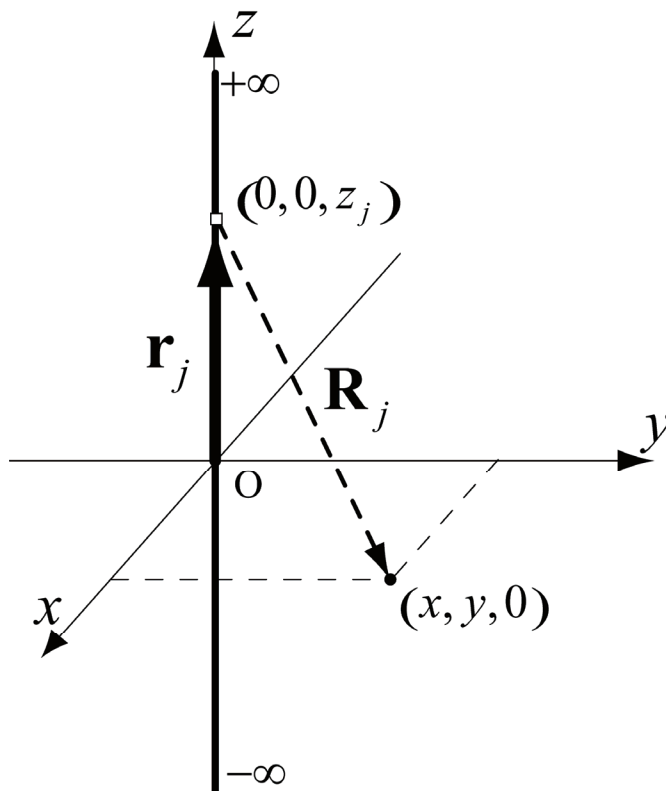
$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (\text{単位: } \frac{\text{C}}{\text{m}})$$

ただし、 Δs は微小線素の長さ、 Δq はこの微小線素上の電荷である。ここで図に示すように z 軸上にある無限に長いワイヤーを考える。ワイヤーは十分細く、その太さは無視できる。このとき、ワイヤー上の点 $\mathbf{r}_j(0, 0, z_j)$ を含む微小線素 Δz_j に存在する電荷量 Δq_j は、各点での線電荷密度を、 λ_j とすると $\Delta q_j = \lambda_j \Delta z_j$ と表せる。次の問いに答よ。

(1) ワイヤー上の点 $\mathbf{r}_j(0, 0, z_j)$ から空間の点 $\mathbf{r}(x, y, 0)$ に向かうベクトル $\mathbf{R}_j$ が

$$\mathbf{R}_j = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (-z_j)\mathbf{k}$$

となることを示せ。



- (2) ワイヤー上の点 $\mathbf{r}_j(0,0,+z_j)$ にある微小線素 Δz_j が空間の点 $\mathbf{r}(x,y,0)$ につくる電場 $\Delta \mathbf{E}^{(+)}$ の各成分を求めよ。ただし、この点での線電荷密度を λ_j とする。

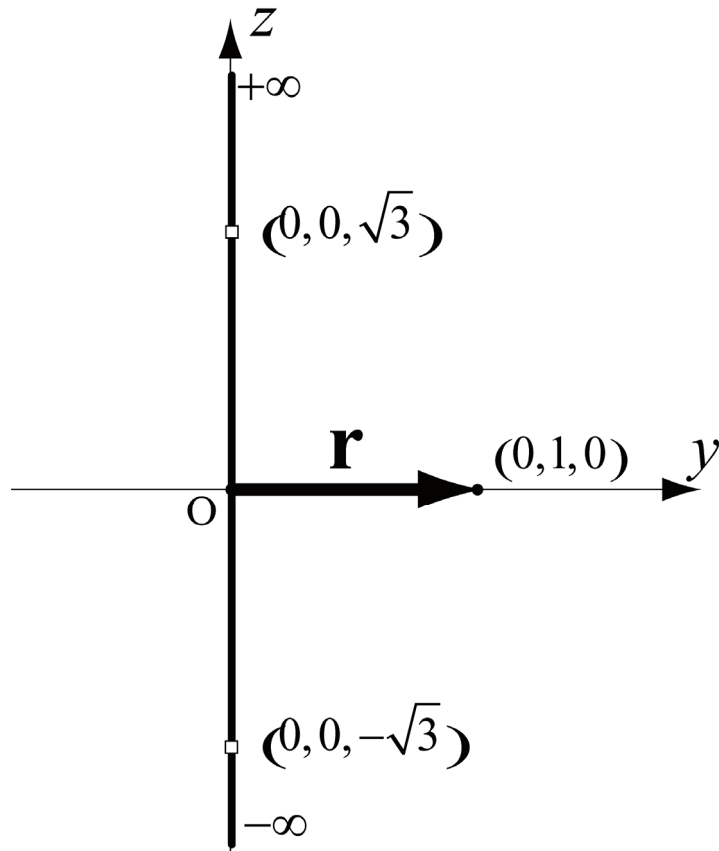
ヒント：式 () と同様にして、電場は

$$\Delta \mathbf{E}^{(+)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_j}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right) \Delta z_j$$

従って、例えば、電場の y 成分は、

$$\Delta E_y = \frac{\lambda_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{[x^2 + y^2 + z_j^2]^{3/2}} \Delta z_j$$

- (3) ワイヤー上の点 $\mathbf{r}_j(0,0,-z_j)$ にある微小線素 Δz_j が空間の点 $\mathbf{r}(x,y,0)$ につくる電場 $\Delta \mathbf{E}^{(-)}$ の各成分を求めよ。
- (4) (2) (3) で、 $z_j = \sqrt{3}$ とする。 (y,z) 平面上の点 $\mathbf{r}(0,1,0)$ における電場 $\Delta \mathbf{E}^{(+)}$ 及び $\Delta \mathbf{E}^{(-)}$ を、各々、ベクトル図として下図に図示せよ。ただし、図示するにあたって電荷密度は、いずれの場合も簡単のため、 $\lambda_j = 4\pi\epsilon_0$ とする。



- (5) ワイヤー上で電荷が一様 ($\lambda_j = \lambda = \text{const.}$) に分布しているとする。このとき、(2) (3) (4) の結果から、ワイヤー上の点のうち、原点をはさんで対称な2点が、点 $\mathbf{r}(x, y, 0)$ につくる電場 $\Delta \mathbf{E}^{(+)}$ 及び $\Delta \mathbf{E}^{(-)}$ の z 成分は、互いに打ち消しあい、ゼロとなることを説明せよ。
- (6) 無限に長いワイヤーに電荷が一様に分布する場合に、点 $\mathbf{r}(x, y, 0)$ における電場は、次の式で与えられることを示せ。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$$

$$E_x = K \frac{x}{R^2}, \quad E_y = K \frac{y}{R^2}, \quad K = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

また、これは第 I 編 § 2. 2. 2 問 9 の線源から湧き出す流体の速度場の場合と同じ形であることを確認せよ。従って、電場の大きさは、考えている点の z 軸からの距離 ($R = \sqrt{x^2 + y^2}$) が同じであれば、変わらないことを確かめよ。

* ヒント：次の積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_j}{(R^2 + z_j^2)^{3/2}} = \frac{2}{R^2}$$

この積分公式は、 $z_j = R \tan \theta$ ($-\infty \leq z_j \leq +\infty \rightarrow -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) とおくことにより、次のようにして確かめることができる。

$$d(\tan \theta) / d\theta = 1 / \cos^2 \theta \text{ より、 } dz_j = R d\theta / (\cos^2 \theta)$$

$$R^2 + z_j^2 = R^2 (1 + \tan^2 \theta) = R^2 / \cos^2 \theta$$

$$\text{従って、} \quad \frac{dz_j}{(R^2 + z_j^2)^{3/2}} = \frac{R d\theta / \cos^2 \theta}{R^3 / \cos^3 \theta} = \frac{\cos \theta d\theta}{R^2}$$

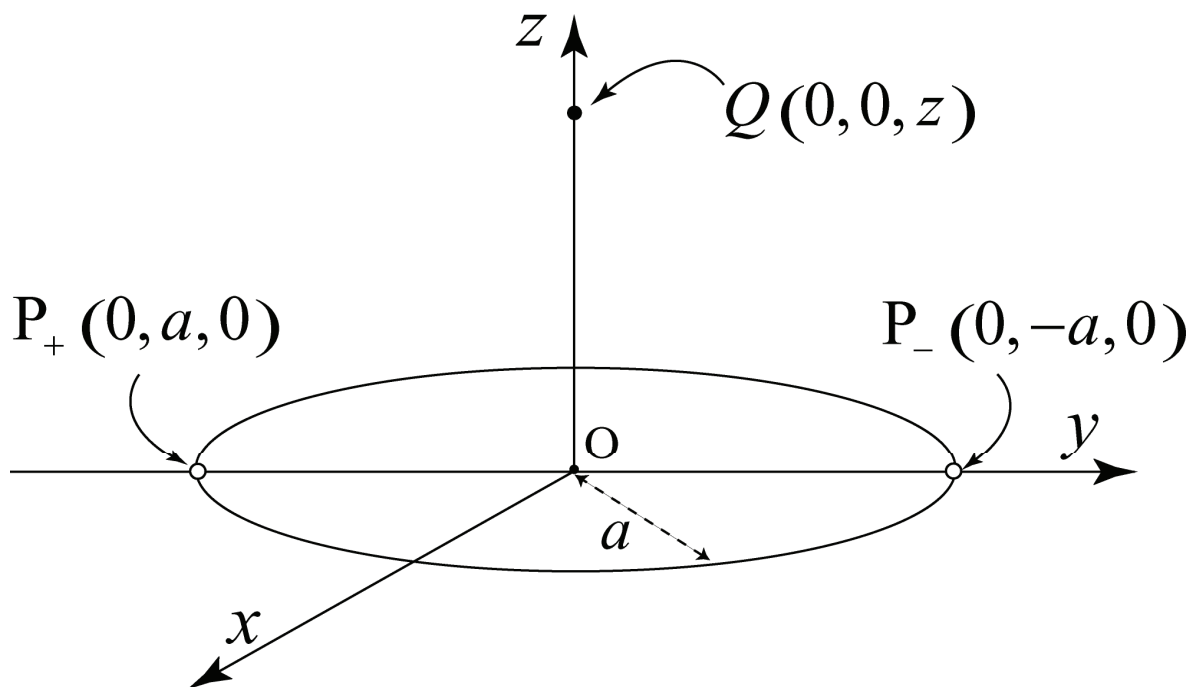
- (7) 上では、 $z=0$ の平面上の点 $\mathbf{r}(x, y, 0)$ を考えた。考えている点の z 座標がゼロでない場合、すなわち、より一般に、 $\mathbf{r}(x, y, z)$ であっても、電場の z 成分はゼロとなり、電場は (6) の場合と同様に

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right), \quad \mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で与えられることを示せ。

問3 (線状のリング)

図のような半径 a の線状リングに一樣に電荷が分布している。線電荷密度を λ ($\lambda > 0$) とする。このとき次の問に答よ。



- (1) リング上の点 $P_+(0, a, 0)$ 及び点 $P_-(0, -a, 0)$ にある電荷を考える。 z 軸上の点 $Q(0, 0, z)$ において、これらの電荷がつくる電場を考える。電場の方向の単位ベクトルを、各々、 $\mathbf{e}_{P_+}, \mathbf{e}_{P_-}$ とする。 $\mathbf{e}_{P_+}, \mathbf{e}_{P_-}$ を図示せよ。
- (2) この線状リングが、 z 軸上の点 $Q(0, 0, z)$ につくる電場は、 z 成分しか持たないことを、図を用いて説明せよ。
- (3) このリング上の点 $P_j(x_j, y_j, 0)$ にある微小線素 ds_j と、点 $Q(0, 0, z)$ との距離を R_j とする。この微小線素の電荷が点 Q につくる電場 $\Delta \mathbf{E}_j$ の z 成分が、

$$dE_{zj} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\lambda ds_j}{R_j^3}$$

となることを示せ。

- (4) リング状の微小線素 ds_j は、この場合、半径 a と図に示した $d\theta$ とを用いて $ds_j = a d\theta$ と表すことができる。従って、リング全体の電荷による電場は、

$$E_z = \frac{z\lambda(2\pi a)}{4\pi\epsilon_0[a^2 + z^2]^{3/2}}$$

で与えられることを示せ。

- (5) このリングの全電荷量を q とする。 $z \gg a$ であるとき、(4) で求めた電場は、原点にある点電荷 q がこの点につくる電場と近似的に等しくなることを示せ。

問4 前問と同じ半径 a の線状リングを考える。前問では、電荷分布を一様とした。ここでは、リングの半分 ($0 \leq \theta \leq \pi$) の電荷密度が $+\lambda$ 、残りの半分 ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$) が $-\lambda$ であるとする。このとき、この線状リングが、点 $Q(0,0,z)$ につくる電場 $\mathbf{E}$ を求めよ。

問5 (面状電荷と面積密度)

電荷が面状に分布する場合、面電荷密度は単位面積あたりの電荷として、次のように定義される。

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (\text{単位: } \frac{\text{C}}{\text{m}^2})$$

ただし、 ΔS は微小面素の面積、 Δq はこの微小面素上の電荷である。ここで、次のページの図に示すような半径が a の円板を考える。円板は十分薄く、その厚みは無視できる。この円板上に電荷が、電荷密度 σ で一様に分布している。次の問に答よ。

- (1) z 軸上の点 $Q(0,0,z)$ で電場は、 z 成分しか持たないことを説明せよ。
 (2) 円板上の点 $P_j(x_j, y_j, 0)$ を囲み、図に示すような微小面積 $dS_j = r dr d\theta$ を考える。ただし、 $r = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$ を表す。この微小面上の電荷が、点 Q につくる電場の z 成分 dE_z が次式で与えられることを示せ。

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z(\sigma r dr d\theta)}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

- (3) 円板全体の電荷 ($0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考えたとき、点 Q における電場の z 成分 E_z が、

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

で与えられることを示せ。

ヒント： r に関する積分に対して、 $X = r^2 + z^2$

と置くと、 $dX = 2rdr$ となる。このとき、積分公式

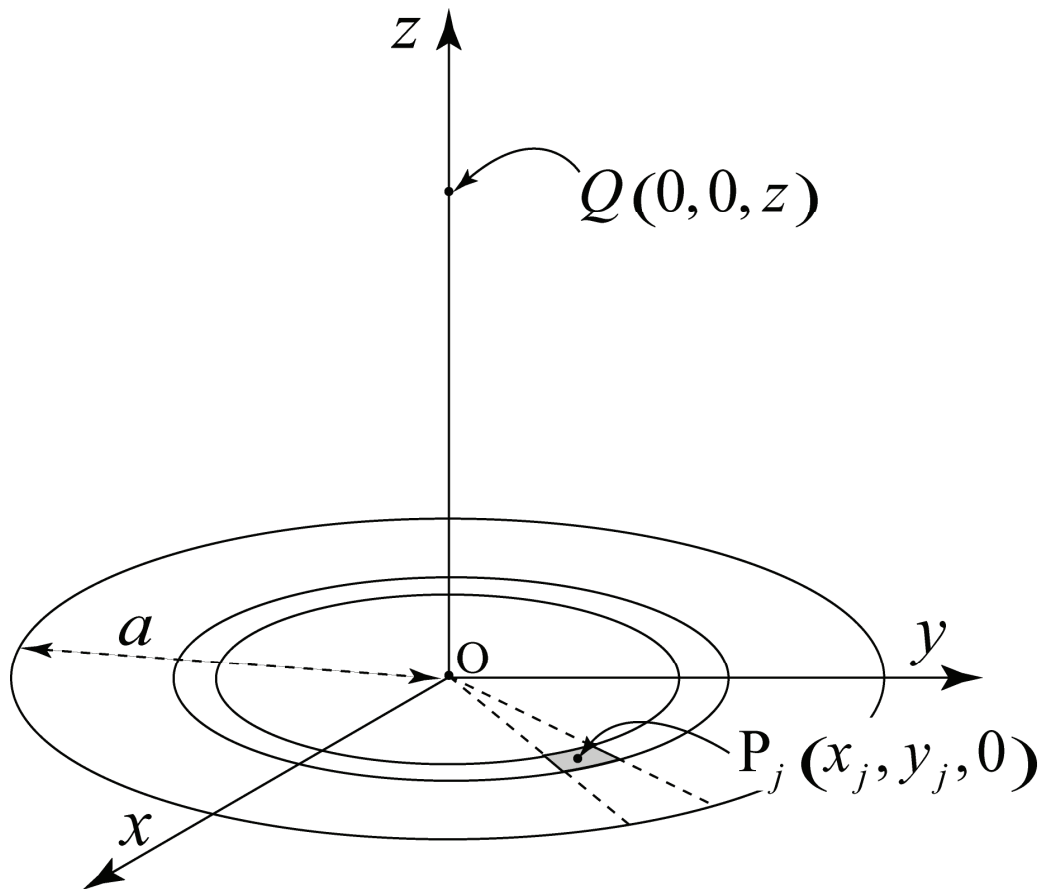
$$\int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -3/2)$$

を用いる。

- (4) 円板の半径が無限大($a \rightarrow \infty$)になった場合、すなわち、無限平板の場合の電場は、 z によらず一定で、次式となることを確かめよ。

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- (5) 点 $Q(0,0,z)$ における電場の z 成分 E_z を求めよ。無限平板の場合、点 $Q'(0,0,-z)$ における電場の大きさは、(4)と同じになることを確かめよ。



2. 5 まとめの Quiz

1. クーロンの法則

(クーロン力の大きさ)

(クーロン力の方向)

(原点に置かれた点電荷 q とクーロン力)

空間の点 $Q(x, y, z)$ にかれた点電荷 q' に働くクーロン力 $\mathbf{F}$ は、点 Q の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とすると、

$\mathbf{F} =$

ここで、

$\epsilon_0 :$

2. 電場

(クーロン力と電場)

電場 $\mathbf{E}$ が存在する空間に電荷 q' を試験的に持ち込んだとき、この電荷は

$$\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$$

(2.2.1)

のクーロン力を受ける。

3. 重ね合わせの原理

(空間の点 $P_j(x_j, y_j, z_j)$ に置かれた点電荷 q_j)

空間の点 $P_j(x_j, y_j, z_j)$ に q_j がある。このとき、点 $Q(x, y, z)$ における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{R_j^2} \frac{\mathbf{R}_j}{R_j}$$

と表される。ここで、 $\mathbf{R}_j$ は点 P 、点 Q の位置ベクトルを、各々、 $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}$ とするとき、

$$\mathbf{R}_j = \boxed{\phantom{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}}$$

(N 個の点電荷がある場合の電場)

空間に N 個の点電荷がある。これら各点電荷の位置と電荷を、各々、

$$P_j(x_j, y_j, z_j), q_j (j=1, 2, \dots, N)$$

とする。このとき、点 $Q(x, y, z)$ における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、各電荷が単独に存在する場合の電場、 $\mathbf{E}_j(\mathbf{r})$ の重ね合わせとして、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \boxed{\phantom{\sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j(\mathbf{r})}}$$

となる。

4. 電荷密度と電場

(電荷密度)

点 $P_j(x_j, y_j, z_j)$ を囲む微小体積 ΔV_j に存在する電荷量 Δq_j は、電荷密度 $\rho_e(x_j, y_j, z_j)$ を用いて

$$\Delta q_j = \rho_e(x_j, y_j, z_j) \Delta V_j \quad (2.4.2)$$

となる。

(N 個の微小体積についての和)

空間を N 個の微小体積に分割する。点 $Q(x, y, z)$ における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、各々の微小体積にある電荷による電場を、重ね合わせることにより、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) =$$

となる。

(連続的な電荷分布の場合の電場)

分割数を無限大に増やした極限では、上の和は積分

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V$$

$$dV_j$$

で表される。ただし、積分は電荷を含む全空間にわたって行う。直角座標系で、電場の x 成分は、

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V$$

$$dx_j dy_j dz_j$$

となる。

3. 電場の流束とガウスの法則

3. 1 電場の“流束”

3. 1. 1 定義

第 I 編 § 2. 2 及び § 4. 2 では、エネルギーの流れや流体の流れ場に関して、流束の概念を説明した。ここでは、空間の面に関する“電場 $\mathbf{E}$ の流束”を、次のように定義する。

$$\text{微小面積 } \Delta S \text{ を通過する“電場の流束”} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \Delta S \quad (3.1.1)$$

さらに、考える面全体に関する流束は、第 I 編 § 4. 2 で定義した面積分を用いて

$$\text{面 } S \text{ を通過する“電場の流束”} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.1.2)$$

3. 1. 2 電場の流束と電気力線

第 I 編 § 2. 1 で述べたように流れ場を可視化し、流れ場の様子を“直観的”に理解するために流線図が有効である。電場の場合にも、電場の様子を直観的に理解するために電場の流線、すなわち“電気力線”を考える。

電気力線を描く場合には、以下の点に注意する。

- 1) 流線の場合と同様、空間の各点において電気力線の接線方向は、その点における電場ベクトルの方向を向く。
- 2) 電場の場合、流れ場での“湧き出し”は“正電荷”に対応し、また、“吸い込み”は“負電荷”に対応する。
- 3) 従って、電気力線は正電荷から出発し、負電荷に入る以外にその終端を持たない。すなわち、電荷の無い点で電気力線は途切れることはない。
- 4) 電荷の無い点で、電気力線が交わることは無い。もし、空間のある点において、2 本以上の電気力線があるとすると、その点で電場の方向は定まらない。
- 5) 正電荷から湧き出す、或いは、負電荷に吸い込まれる、電気力線の本数は、電荷の大きさに比例するように描く。

6) 電気力線の本数の粗密によって、空間の各場所での電場の強度を表現する。

実際に電気力線を描こうとすると、例えば、上記、5)、6)の電気力線の本数と電荷や電場の大きさとの関係を、正確に表現することは必ずしも容易ではない。電気力線は、あくまでも場を直観的、定性的に表現するためのものであり、場の概略の様子を理解するために用いる。

定量的に電場の大きさや方向を議論するには、前章や以下での数学的な扱いが必要となる。しかしながら、“電場の流束”、さらには、以下で説明する“ガウスの法則”の理解を助けるためにも、電気力線を描き、直観的、定性的に電場の様子を把握しておくことは、非常に有効であり、かつ、重要である。

問1 原点に置かれた負電荷について、電場の概略の様子を電気力線として描け。

問2 § 2.3 問2 電荷双極子の場合について、電場の概略の様子を電気力線として描け。

問3 § 2.3 問2で二つの電荷の符号が同じ場合には、電場の概略の様子はどうか？

問4 § 2.4 問2 の無限線状電荷の場合について、電場の概略の様子を電気力線として描け。

問5 無限平板に正電荷が一様に分布する場合 (§ 2.4 問5 参照)について、電場の概略の様子を電気力線として描け。

3. 2 ガウスの法則（その1：積分形）

3. 2. 1 原点にある点電荷

（半径 r の球面上における電場の流束）

点電荷による電場は、クーロンの法則から次式のように表された。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (3.2.1)$$

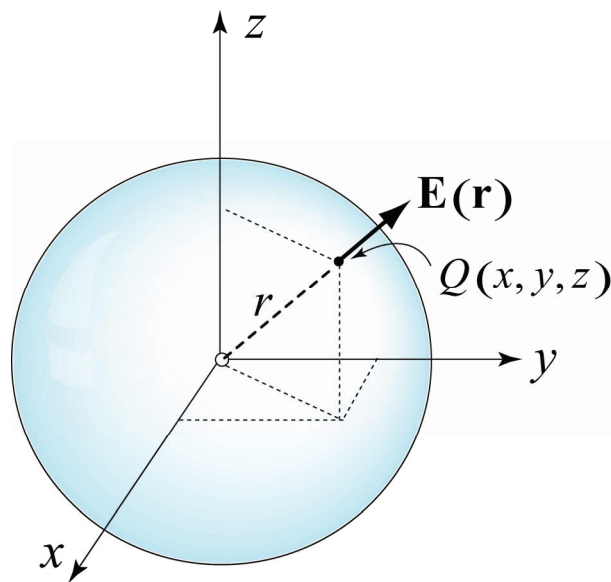


図 3. 2. 1 点電荷による電場

この点電荷を囲む半径 r の球面を考える。式(3.2.1)で与えられる電場 $\mathbf{E}$ は、第 I 編 § 2 の問 6（点光源からの光の放射）におけるエネルギーの流れ場 $\mathbf{h}$ や問 10（点源からの湧き出し）における速度場 $\mathbf{v}$ と同じ形をしていることに気付く。これらの場合と同じで、電場の大きさは、半径 r のみによって決まる。また、電場の方向は、球面上の各点で面の法線方向を向く。従って、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E$ であり、

$$\text{“電場の流束”} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.2.2)$$

すなわち、点電荷を囲む球面についての電場の流束と、この球面内部の電荷に

ついて、次の関係が成立する。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{ガウスの法則}) \quad (3.2.3)$$

この式は、

球表面における“電場の流束”は、原点からの距離によらず一定であり、
球内部の電荷によってのみ決まる

ことを意味している。これを“ガウスの法則”と呼ぶ。

第 I 編 § 2 の問 6（点光源からの光の放射）の場合に、球面上のエネルギー流束が原点における光源の強度によって決まってしまうのに対応する。また、第 I 編 § 2 の問 10（点源からの流体の湧き出し）の例において、球面上の流束が原点における流体の湧き出し量によって決まるのと同様にして理解することができる。

（任意の形をした閉曲面の場合）

上の例では、点電荷を囲む曲面として球面を考えた。実は、点電荷を囲む“任意の閉曲面”についても式(3.2.3)は成り立つ。すなわち、点電荷を囲む任意の形をした閉曲面について、その曲面を通過する“電場の流束”は、その内部にある電荷によって決まる。

このことを確かめるために、図 3. 2. 2 に示すような原点を取り囲む閉曲面 S を考える。さらに面 S が囲む領域を図のように次の二つの領域にわけ

領域 1：球面 S' によって囲まれる原点近傍の微小領域。
球面の半径を r' とする。
また、球面上の各点の位置ベクトルを $\mathbf{r}'$ で表す。

領域 2：曲面 S と球面 S' によって囲まれる領域。
この領域を、以下、 V' と呼ぶ。

まず領域 V' について考える。第 I 編 § 4. 3 の式(4.3.3)のガウスの定理を適用すると

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S'} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}' dS' = \int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{E} dV \quad (3.2.4)$$

ただし、左辺第 1 項目は外側の任意の形をした面 S についての面積分(流束)を、また、第 2 項目は内側の球面 S' について面積分(流束)を表す。

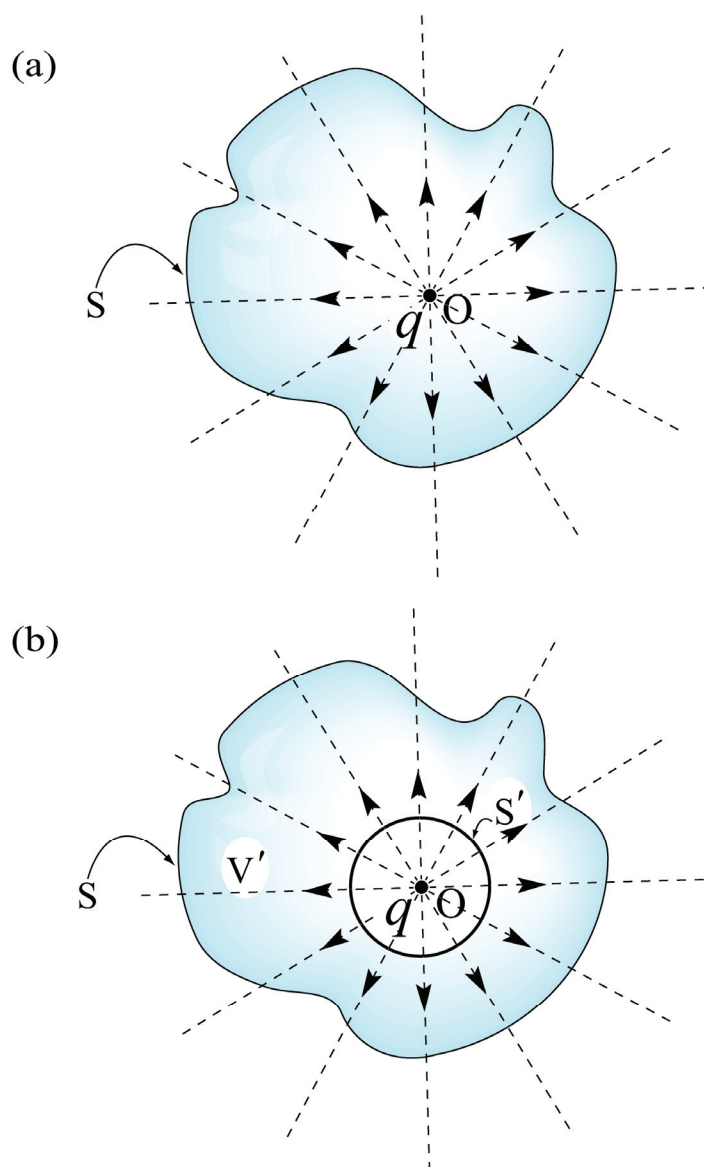


図 3. 2. 2 原点にある点電荷を囲む任意の形をした閉曲面

ここで、式(3.2.4)の右辺の体積分で、 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ はクーロンの法則 式(3.1.3) を用いて、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (3.2.5)$$

第 I 編 § 3. 3 の問 3 で確かめたように、電荷の存在する場所以外 ($r > 0$) で

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (3.2.6)$$

となる。従って、領域 V' には電荷がないから

$$\boxed{\int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0} \quad (3.2.7)$$

となる。

式(3.2.7)から、式(3.2.4)は

$$\boxed{\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S'} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}' dS'} \quad (3.2.8)$$

となる。ここで、面 S' の法線ベクトル $\mathbf{n}'$ は、領域 V' の内側から外側（すなわち原点の方向）に向かうから（外向き法線：第 I 編 2. 2. 1 参照）、

$$\mathbf{n}' = -\frac{\mathbf{r}'}{r'} \quad (3.2.9)$$

となる。従って、式(3.2.8)の右辺は、

$$\boxed{- \int_{S'} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}' dS' = \int_{S'} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'} \right) dS' = \frac{q}{\epsilon_0}} \quad (3.2.10)$$

式(3.2.8)と式(3.2.10)とから、任意の形をした閉曲面についての“電場の流束”も、式(3.2.3)と全く同様に

$$\boxed{\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}} \quad (3.2.3)$$

となることがわかる。

3. 2. 2 多数の電荷がある場合の電場の流束とガウスの法則

前節では、1 個の点電荷の場合について考えた。もし、図 3. 2. 3 に示すように、考えている領域に N 個の点電荷が存在する場合、この領域を囲む閉曲面についての電場の流束と電荷の間には、次の関係が成立する。(本節問 5 参照)

$$\boxed{\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\sum_{j=1}^N q_j}{\epsilon_0}} \quad (3.2.3)'$$

その意味するところを言葉で表現すると、

$$\boxed{\text{閉曲面をとる“電場の流束”} = \frac{\text{(閉曲面の内部にある電荷の総和)}}{\epsilon_0}}$$

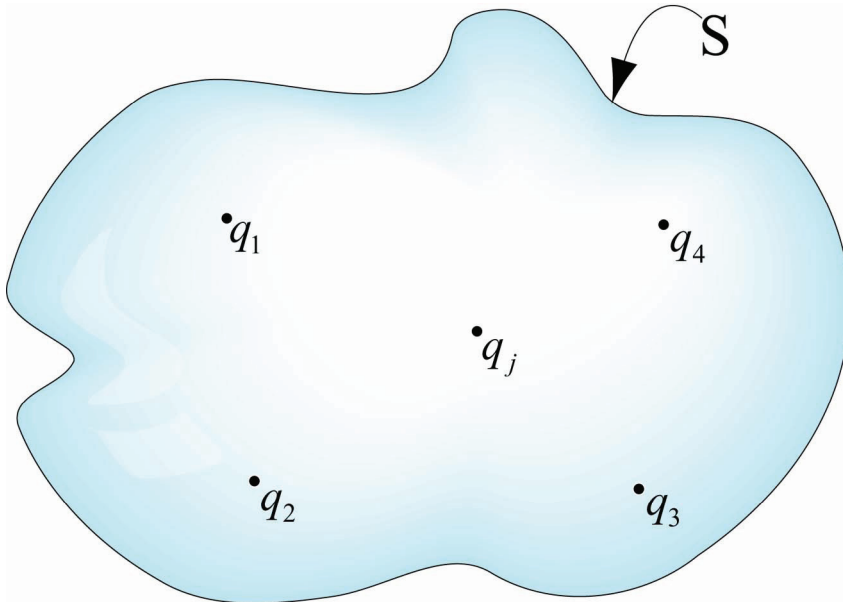


図 3. 2. 3 多数の電荷が存在する場合のガウスの法則

3. 2. 3 連続的な電荷分布に対するガウスの法則

さらに多数の電荷が存在し、電荷の分布を連続的な分布とみなせる場合を考える。この場合、考えている領域を N 個の微小体積に分割し、空間の点 P_j を囲む微小体積内の電荷量を Δq_j 、電荷密度 ρ_j とすると、式(2.4.2)から

$$q_j \rightarrow \Delta q_j = \rho_j \Delta V_j \quad (3.2.11)$$

このとき、式(3.2.3) ' の電荷についての和は、このような N 個の微小体積についての和と考えることができる。すなわち、

$$\sum_{j=1}^N q_j \rightarrow \sum_{j=1}^N \Delta q_j = \sum_{j=1}^N \rho_j \Delta V_j \quad (3.2.12)$$

この和は、 $N \rightarrow \infty$ の極限では体積分として

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \rho_j \Delta V_j \rightarrow \int_V \rho dV \quad (3.2.13)$$

と表すことができる。

従って、**ガウスの法則** 式(3.2.3) ' は、電荷密度に関する体積分を用いて

$$\boxed{\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\int_V \rho_e(\mathbf{r}') dV'}{\epsilon_0}} \quad (3.2.3)''$$

と表現できる。

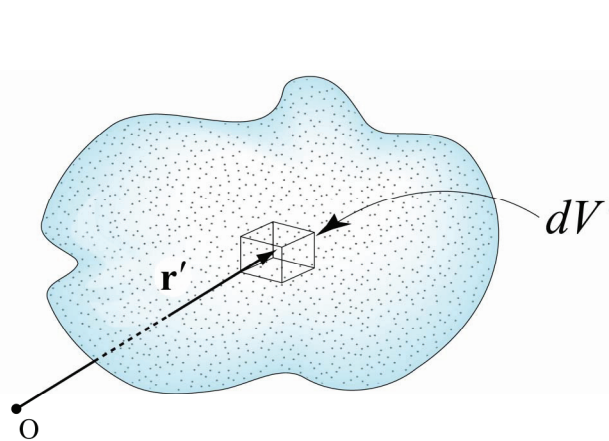


図 3. 2. 3 連続的な電荷分布に対するガウスの法則

問1 (球面上の微小面積ベクトル)

- (1) 球座標 (r, θ, ϕ) で、球面上の点 (r, θ, ϕ) における微小面積ベクトル $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ の方向及び大きさが、次の式で与えられることを確かめよ。

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

- (2) 電場の流束を、次式から計算し、式(3.2.3)と一致することを確かめよ。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

問2 第I編§3問3. 3で証明した $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ (ただし、 $r > 0$) を、ここで、再度確かめよ。

問3 上では、電場がクーロンの法則 式(2.2.4)に従うとして、電場の流束を求め、ガウスの法則 式(3.2.3) を導いた。

クーロンの法則		ガウスの法則
$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$	→	$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$
(2.2.4)		(3.2.3)

点電荷がつくる電場が球対称であり、電場は r 方向成分しか持たないことがわかっているとする。このとき、点電荷 q を囲む半径 r の球面にガウスの法則、式(3.2.3)を適用し、ガウスの法則から電場の大きさを求めると、

ガウスの法則		電場の大きさ (クーロンの法則)
$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	→	$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
(3.2.3)		

となり、クーロンの法則から得られる電場の大きさと同じ結果を与えることを示せ。

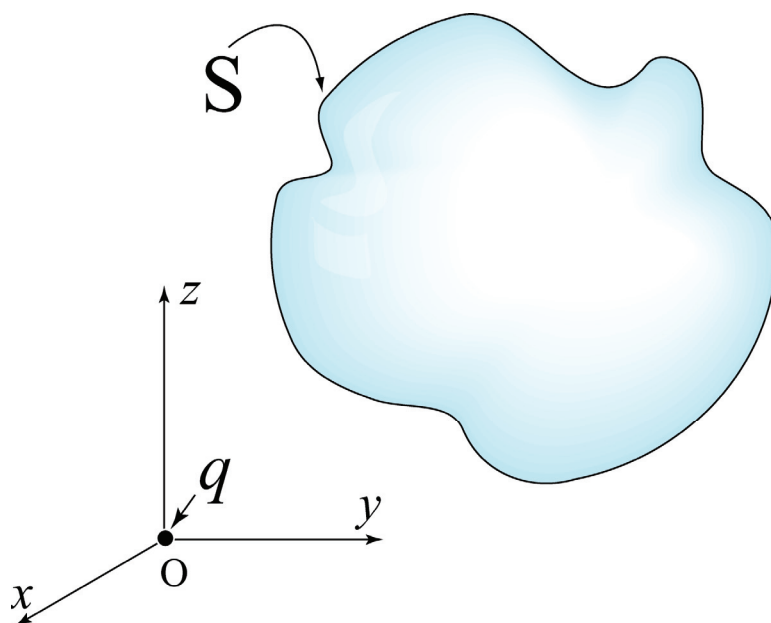
問4（領域内に電荷がない場合）

原点に点電荷 q があるとき、図に示すような閉曲面 S を考える。この閉曲面に関して“電場の流束”がゼロになること、すなわち、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

となることを示せ。

ヒント：この閉曲面に対して、面積分に関するガウスの定理を適用し、 $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ を用いる。

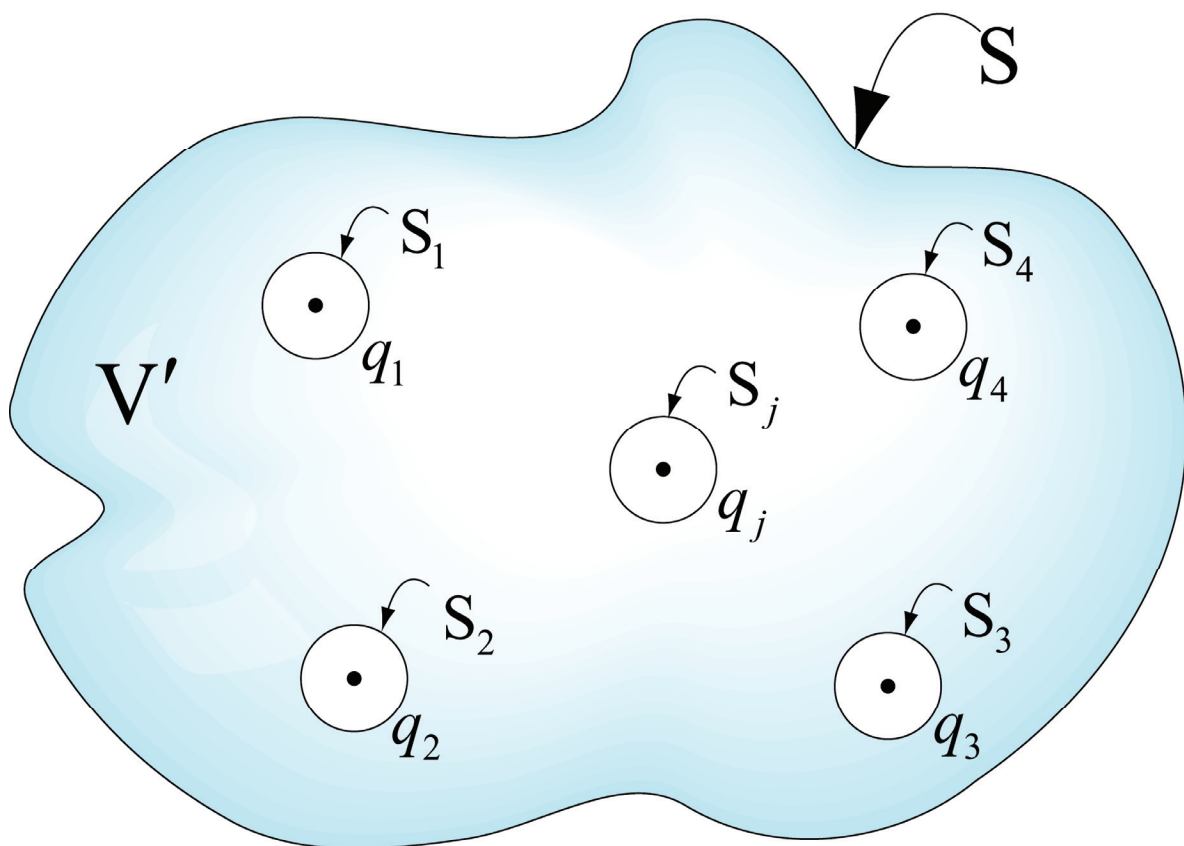


問5（多数の電荷がある場合の“電場の流束”）

次の手順で、閉曲面 S 内に N 個の点電荷 $q_j (j=1, 2, \dots, N)$ がある場合、“電場の流束”が式(3.2.3)'

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{\epsilon_0}$$

になることを示せ。



- (1) 図のように、 N 個の電荷、各々について、その周りに微小な球面 S_1 、 S_2 、 S_j 、 $\dots$ 、 S_N を考える。面 S 内のこれ以外の領域 V' をとする。このとき領域 V' を囲む面についての電場の流束は、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 + \dots + \int_{S_j} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_j dS_j + \dots + \int_{S_N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_N dS_N$$

になることを確かめよ。

- (2) ガウスの定理及び $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ を用いて、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 - \dots - \int_{S_j} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_j dS_j - \dots - \int_{S_N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_N dS_N$$

となることを示せ。

(3) S_j についての各々の面積分は、

$$-\int_{S_j} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_j dS_j = \frac{q_j}{\epsilon_0}$$

となることを示せ。

ヒント：この場合、電荷は必ずしも原点にない。 j 番目の電荷の位置を

$\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ 、球面 S_j 上の点を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすると、前節 2.

3 で確かめたように、 S_j 上の点における電場は、次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right), \quad \mathbf{R}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \quad R_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$$

(4) (3) を (2) に用いて、次式が得られることを確かめよ。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} \dots + \frac{q_j}{\epsilon_0} \dots + \frac{q_N}{\epsilon_0}$$

問6 図のように空間中に 3 個の電荷 q_1, q_2, q_3 がある。閉曲面 S 上の各点 P にこれらの電荷が作る電場を、各々、 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ とする。この閉曲面についての電場の流束に関して、次の二つの流束を考える。

$$\Phi_{E_1+E_2} = \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} dS$$

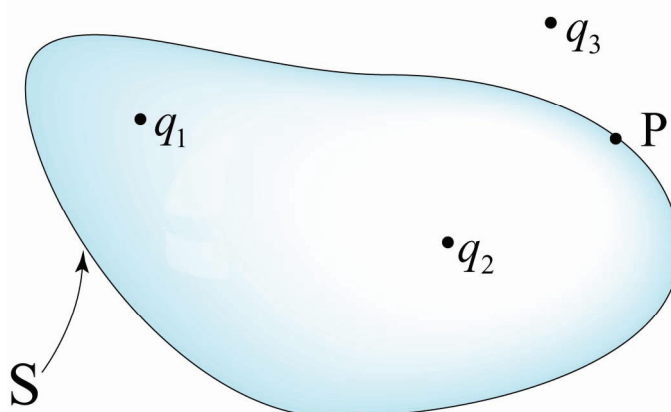
$$\Phi_{E_1+E_2+E_3} = \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{n} dS$$

$\Phi_{E_1+E_2}$ と $\Phi_{E_1+E_2+E_3}$ との大小関係について次のうち正しいものを選び。また、その理由を述べよ。

a. $\Phi_{E_1+E_2} < \Phi_{E_1+E_2+E_3}$

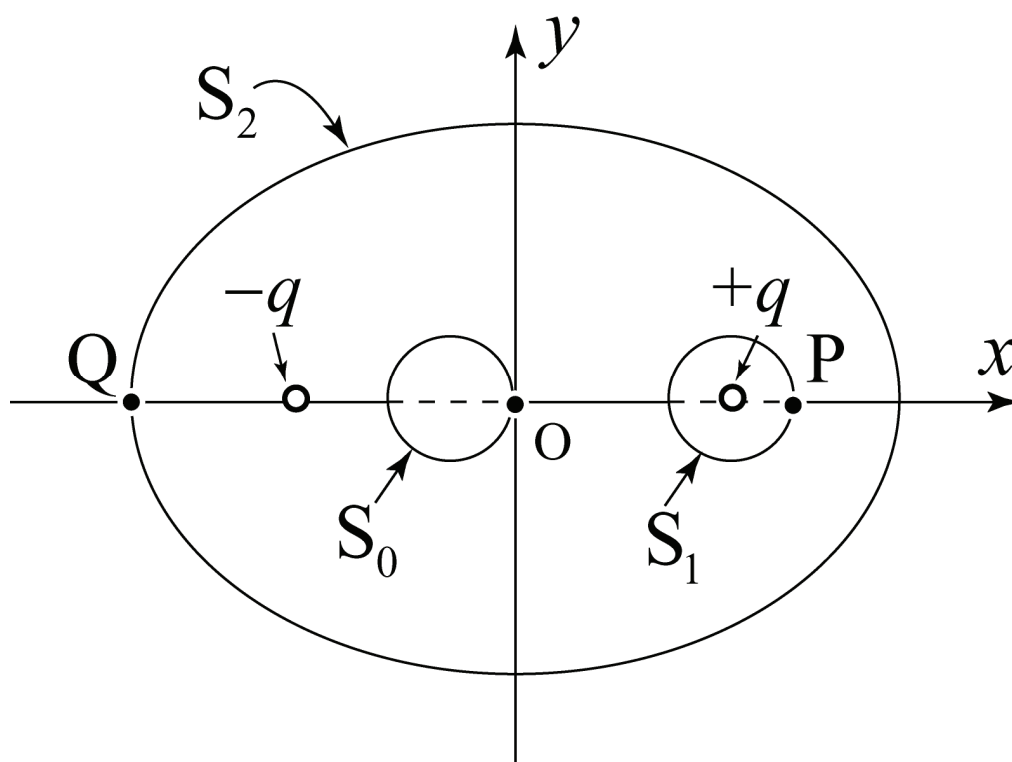
b. $\Phi_{E_1+E_2} = \Phi_{E_1+E_2+E_3}$

c. $\Phi_{E_1+E_2} > \Phi_{E_1+E_2+E_3}$



問 7 図のように、原点 $O(x,y)=(0,0)$ をはさんで等しい距離にある点 $(x,y)=(a,0)$ 及び $(x,y)=(-a,0)$ に、各々、電荷 $+q,-q$ が置かれている。さらに、図の点 P、Q の座標を、各々、 $P(x,y)=(2a,0)$ 及び $Q(x,y)=(-3a,0)$ とする。このとき、次の問に答よ。

- (1) 図の原点 O、点 P、点 Q における電場を求めよ。
- (2) 原点 O とおる閉曲面 S_0 に関する電場の流束を求めよ
- (3) 点 P をとおる閉曲面 S_1 に関する電場の流束を求めよ。
- (4) 点 Q をとおる閉曲面 S_2 に関する電場の流束を求めよ。



問 8 これまでみてきたように、静電場に関するクーロンの法則とガウスの法則は、等価なものであると考えてよいことがわかる。例えば、もし、点電荷による電場がクーロンの法則とは異なり、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

の形で与えられたとする。この点電荷を囲む半径の球面について電場の流束はどうなるか？任意の球面に対して電場の流束は、球面内の電荷量のみによって、きまるか？

3. 3 ガウスの法則（その2：微分形）

前節の結果 式(3.2.3) は、ガウスの法則と呼ばれ、静電場における重要な法則である。とくに、前節では“電場の流束”、すなわち、“電場の面積分”を用いてガウスの法則を数学的に表現したものであり“積分形”のガウスの法則と呼ばれることもある。また、同じ法則を、“電場の発散” $\nabla \cdot \mathbf{E}$ を用いて表現することもできる。これを微分形のガウスの法則と呼ぶ。

空間の点 (x, y, z) において、図 3. 3. 1 のような電荷を囲む微小立方体を考える。第 I 編 § 3 では、流体の流れ場において、このような微小体積を考え、ベクトル場の“発散(div)”の意味を考えた。流束密度ベクトル $\mathbf{f}$ の“発散 ($\nabla \cdot \mathbf{f}$)”と、微小立方体の表面を通過する“流束”との間には、

$$\text{微小立方体の表面の流束} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{f}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = (\nabla \cdot \mathbf{f}) \Delta V \quad (3.3.1)$$

の関係があった。

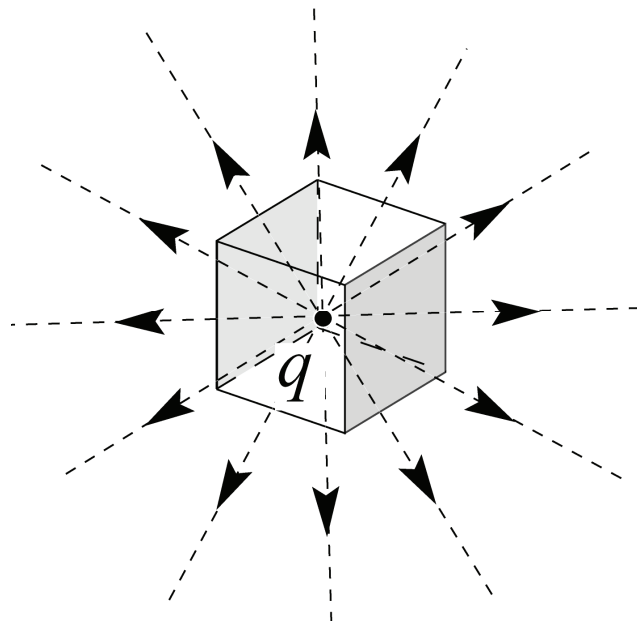


図 3. 3. 1 ベクトル場の発散

同様に、電場の流束と電場の発散との間には、

$$\text{微小立方体の表面に対する電場の流束} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}_i = (\nabla \cdot \mathbf{E}) \Delta V \quad (3.3.2)$$

が成り立つことは、容易に確かめられる。

一方、この微小体積中の電荷を $\Delta q = \rho \Delta V$ とすると、上の積分形のガウスの法則から

$$\text{微小立方体に関する電場の流束} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}_j = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Delta V \quad (3.3.3)$$

式(3.3.2)と式(3.3.3)とを比較すると、

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) \Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Delta V \quad (3.3.4)$$

これから、

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (3.3.5)$$

これを**微分形のガウスの法則**と呼ぶ。**§ 1.**に示した Maxwell の方程式 (1.1) に他ならない。その意味を言葉で表現すると、

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(空間の点 } (x, y, z) \text{ における “電場の発散”)} = \frac{\text{(その点における電荷密度)}}{\epsilon_0} \end{array}}$$

問 空間中に閉曲面 S を考える。この閉曲面に囲まれる領域 V をとし、電場 $\mathbf{E}$ について、**第 I 編 § 4. 3 のガウスの定理** 式(4.3.3) を適用すると、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

となる。このとき、右辺の $\nabla \cdot \mathbf{E}$ に上の**微分形のガウスの法則** 式(3.3.5) を用いると、**積分形のガウスの法則** 式(3.2.3) が得られることを示せ。

3. 4 ガウスの法則の応用

電場を求める際に、考えている系が対称性を持つ場合に、ガウスの法則が有効となる場合が多い。以下、いくつかの例でみてみよう。

3. 4. 1 円筒対称(軸対称)の場合

図 3. 4. 1 に示すような無限に長い直線に、線電荷密度 λ で一様に電荷が分布する場合を考える。直観的に、この場合の電場は、 z 軸に関して対称であり、1) 径方向 ($\mathbf{R}$ 方向) に放射状になっていること、2) また、その大きさは、 z 軸からの距離にのみ依存することが推論できる。

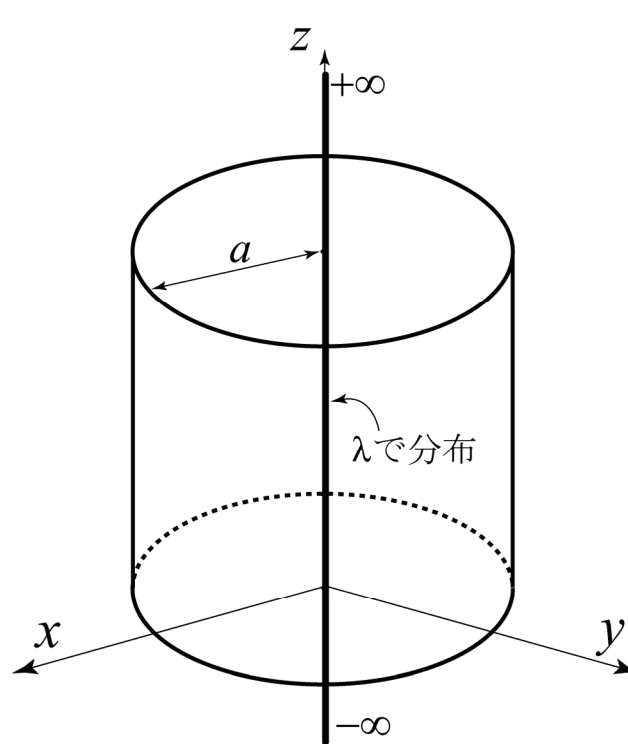


図 3. 4. 1 無限に長い線状電荷による電場

実際に、この場合、先に § 2. 4 問 2 で考えたように、電場は z 成分を持たず、径方向 ($\mathbf{R}$ 方向) 成分のみを持ち、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}{R^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right), \quad \mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (3.4.1)$$

で与えられる。従って、空間の各点での電場の大きさは、 z 軸からの R 距離によってきまり、

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \quad (3.4.2)$$

で与えられる。しかしながら、面倒な積分計算を必要とした。

これに対して、最初に述べたような直観的な理解があれば、ガウスの法則を適用して、比較的簡単に電場を求めることができる。そこで、まず、図 3. 4. 1 に示したように線状電荷を囲み、高さ L 、半径 R の円筒状の閉曲面を考える。この円筒状の閉曲面に関して、前節の積分形のガウスの法則

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\int_V \rho_e(\mathbf{r}') dV'}{\epsilon_0} \quad (3.2.3)''$$

を適用する。

電場の z 成分がない [$\mathbf{E} = E(\mathbf{R}/R)$] から、円筒の上面 S_1 、底面 S_3 については、面積分には寄与でしない。一方、側面 S_2 に関して、面の法線ベクトルは、面上の各点で $\mathbf{n} = (\mathbf{R}/R)$ であり、電場と同じ向きとなる。また、電場の大きさも、面上で変わらないから、積分の外に出すことができる。従って、式(3.2.3)'' の

$$\text{左辺： (円筒面を通過する電場の流束)} = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \int_{S_2} dS = E \cdot (2\pi RL)$$

次に式(3.2.3)''の右辺は、線状電荷の場合、線積分となり、

$$\text{右辺： (円筒面の内部の電荷)} = \frac{\int_V \rho_e(\mathbf{r}') dV'}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\int_L \lambda(z') dz'}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

ガウスの法則 式(3.2.3)''から (左辺) = (右辺) とおくと

$$E \cdot (2\pi RL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad (3.4.3)$$

故に、

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$$

(3.4.2)

これは、§ 2. 4 問 2 で求めた結果と同じである。

3. 4. 2 面状電荷の場合：面对称性のある場合

(無限に広がる平面上の面電荷)

図 3. 4. 2 のように、無限に広がる平面上に、面電荷密度 σ で一様に電荷が分布している。この場合、直観的に電場の z 成分 (面に垂直な成分) のみで、しかも面の両側で対称になると推測される。従って、

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{E}_2 = E_2 (-\mathbf{k}), \quad E_1 = E_2 = E \quad (3.4.4)$$

そこで、この無限平面を挟んで図に示すような直方体の面を考え、ガウスの法則を適用する。 z 軸に垂直な面 S_1 、 S_2 の大きさを面積を A とする。面の外向き法線ベクトルは、各々、

$$\mathbf{n}_1 = +\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{k} \quad (3.4.5)$$

である。電場は z 成分しかないから、これらの面以外については、電場の流束はゼロとなる。

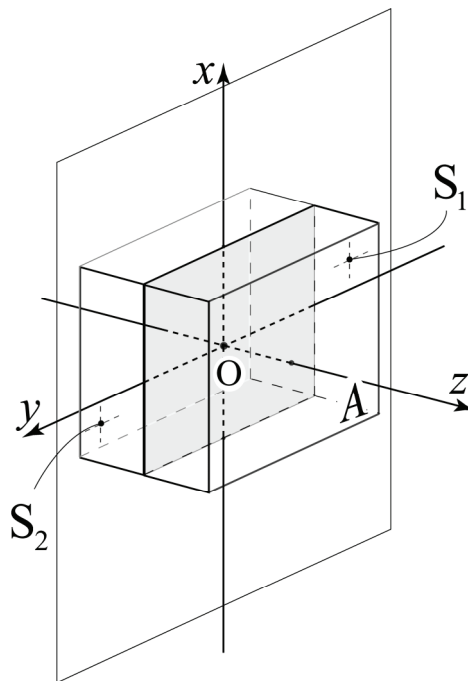


図 3. 4. 2 無限平面に対するガウスの法則の適用

従って、この直方体の面全体をとる電場の流束は、

$$\begin{aligned}
 (\text{面全体をとる電場の流束}) &= \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS \\
 &= EA + EA
 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

一方、この直方体の内部の電荷は、平面上のある面電荷のみを考えればよいから、

$$(\text{直方体の内部の電荷}) / \epsilon_0 = \frac{\int_V \rho_e(\mathbf{r}') dV'}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{3.4.7}$$

よって、ガウスの法則より、電場の大きさは、

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{3.4.8}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(3.4.9)

この問題は、先に **§ 2. 4 問 5** で考えた一様な面電荷 σ を持つ円板の場合で、円板の半径を無限大にした場合と同じである。クーロンの法則を用いても同じ結果が得られることをすでに確かめている。**§ 2. 4 問 1 2** のようにクーロンの法則から、まともに面上の各点の電場を面全体に渡って積分する方法に比較して、ガウスの法則による方法の方が計算は、はるかに簡単であることがわかる。

(二枚の平行な無限平面)

図 3. 4. 3 に示すような 2 枚の平行な無限平面上に、各々、面電荷密度 $+\sigma, -\sigma$ で一様に電荷が分布している。この場合も、電場は平面に垂直な成分しか持たないことがわかる。ガウスの法則を適用すると、結果は次のようになる。

- a. 2 枚の平面の外側の点での電場の大きさ

$$E = 0 \quad (3.4.10)$$

- b. 2 枚の平板の内側の点での電場の大きさ

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.4.11)$$

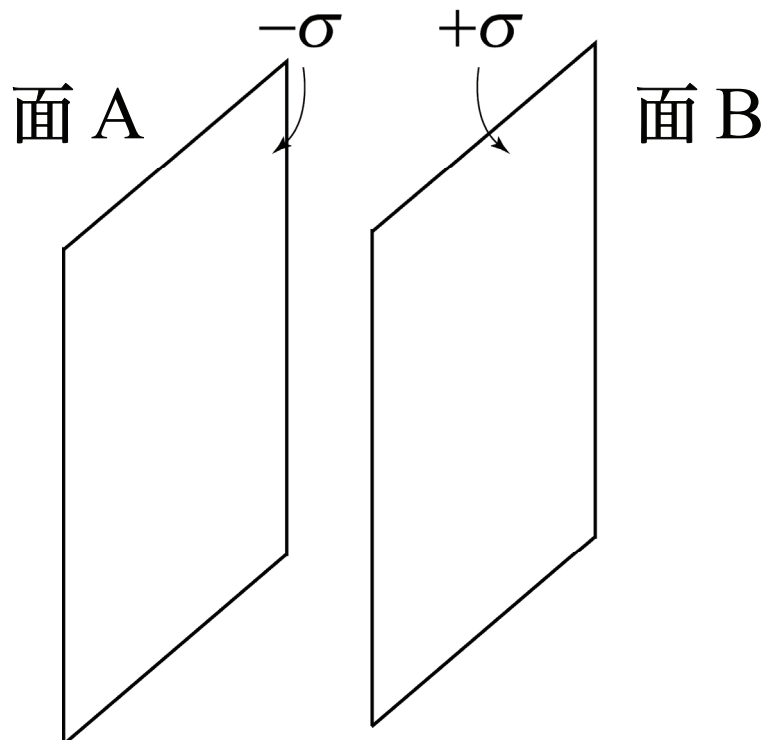


図 3. 4. 3 2 枚の無限平行平板上の面電荷

まず、a. の場合、すなわち、面 A、面 B の外側の領域で式(3.4.10)のように電場がゼロになることを説明する。図 3. 4. 4 のように、両方の面を含むような直方体を考え、ガウスの法則を適用する。

- (1) 面 S_1 : 面 S_1 を通過する電気力線は面 A 上の負電荷に入る。従って、電場は z 軸の正方向を向く。一方、面 S_1 の法線ベクトルは、 z 軸の負方向をむく。

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$$

- (2) 面 S_2 : これに対して、面 B の右側の領域では電気力線は面 B 上の正電荷から湧き出す。従って、この領域でも、電場の方向は z 軸の正方向と考えられる。一方、面 S_2 の法線は z 軸の正方向をむく。

$$\mathbf{E}_2 = E_2 \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$$

- (3) (1)、(2) から、直方体の面全体に関する電場の流束は

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = -E_1 A + E_2 A$$

- (4) このとき、この直方体を囲む領域内で、符号まで考えて正味の電荷はゼロである。

$$+\sigma A + (-\sigma)A = 0$$

- (5) (4) から、この直方体の表面全体にわたる電場の流束はゼロとなる。(3) とから

$$-E_1 A + E_2 A = 0 \quad \therefore E_1 = E_2$$

- (6) 従って、これだけでは、電場の大きさが等しいことがいえるだけで、“大きさ” そのものは決まらない。そこで、重ね合わせの原理を思い出す。右側の平板 ($-\sigma$) が“単独”である場合に、面 S_1 につくる電場 $\mathbf{E}_{(-)}$ と、左側の平板 ($+\sigma$) が“単独”にある場合に、面 S_2 につくる電場 $\mathbf{E}_{(+)}$ とは、前節の一枚の無限平板の結果から考えると、大きさは等しく、向きが逆である。従って、それらの重ね合わせとしての電場はゼロになる。すなわち、

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{(+)} + \mathbf{E}_{(-)} = \mathbf{0} \quad (3.4.12)$$

となる。 $\mathbf{E}_2$ についても同様である。[図 3. 4. 5 (a) (b) 参照]

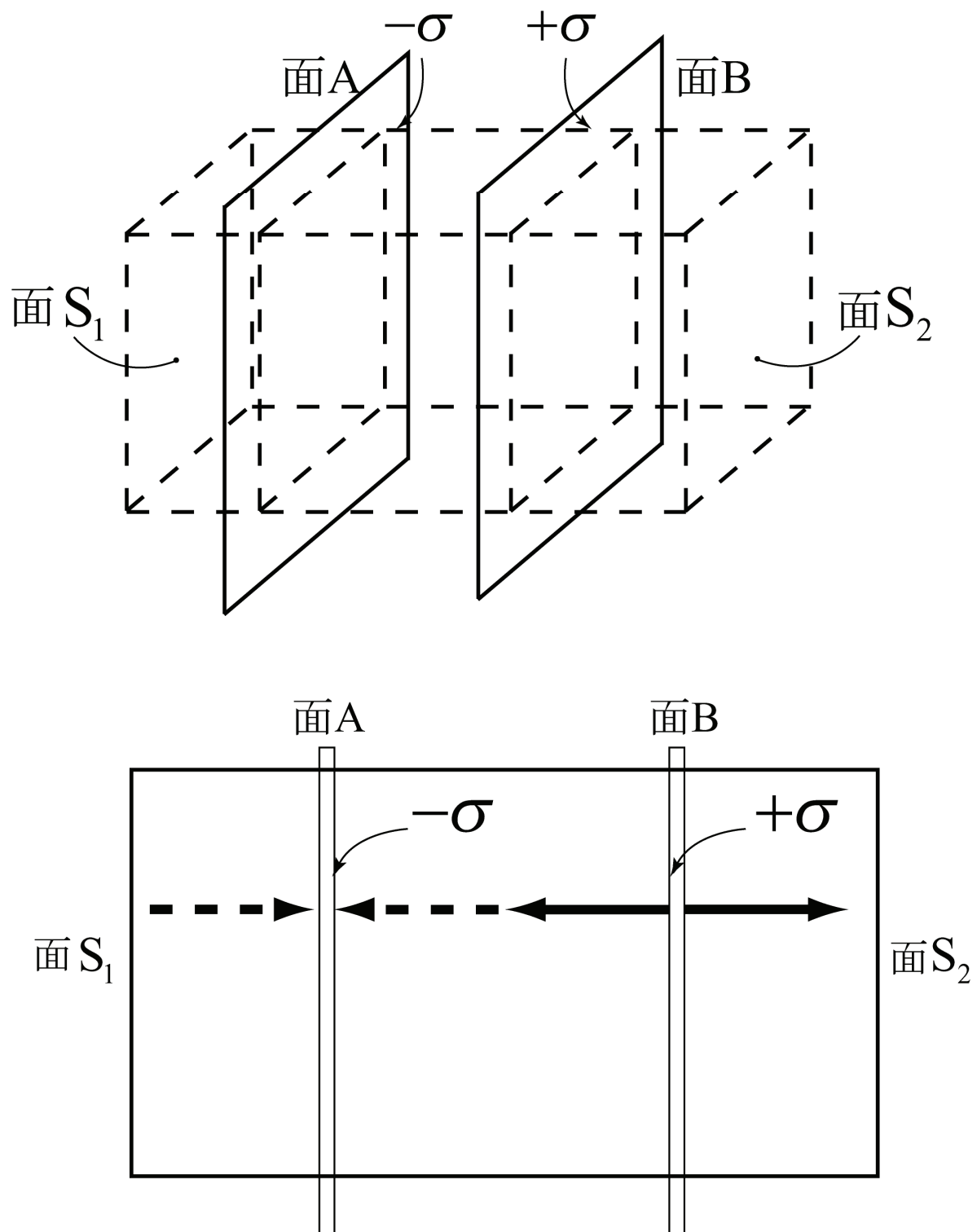


図 3. 4. 4 2 枚の平行な無限平板の外側領域の電場を求めるための閉曲面

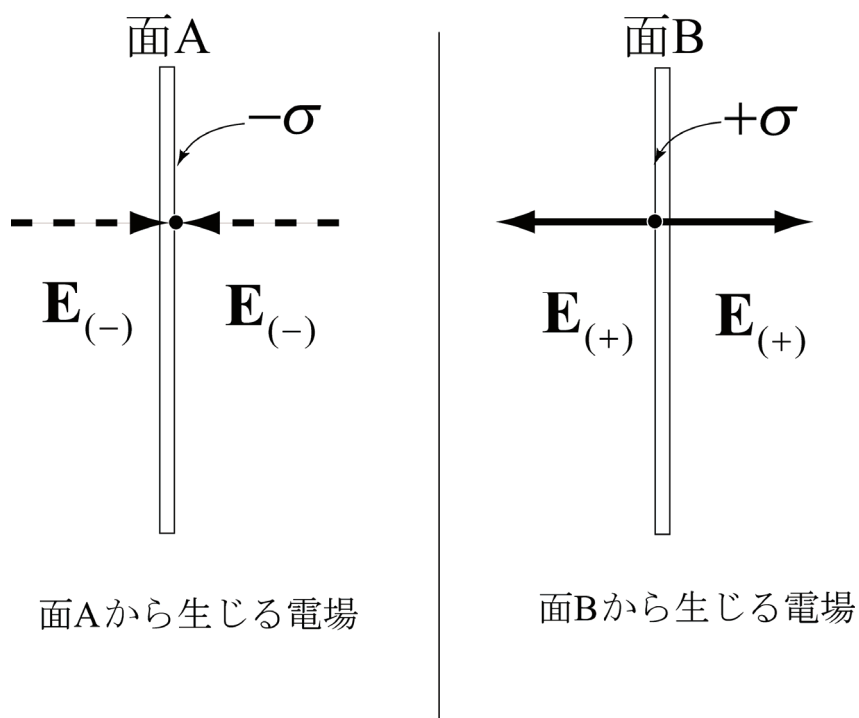


図 3. 4. 5 (a) 各面から生じる電場

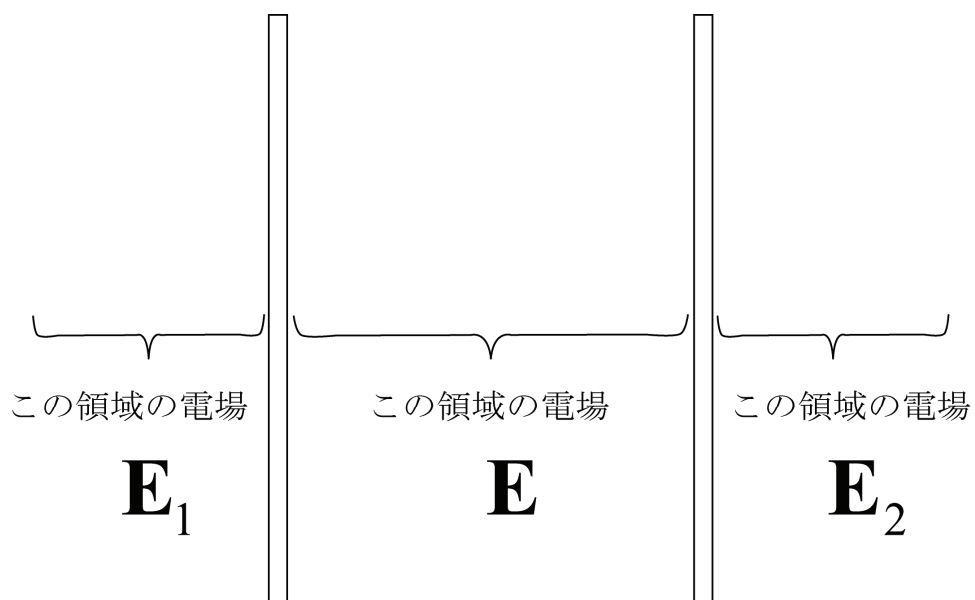


図 3. 4. 5 (b) 各領域における電場

次に、b. 二枚の無限平面の内側の領域における電場が式(3.4.11)で与えられることを説明する。この場合、図 3. 4. 6 のような直方体についてガウスの法則を適用する。

- (1) 面 S_1 : 求める電場を $\mathbf{E}$ とする。この電場は、面 S_1 に対する左側の平面 ($-\sigma$) と右側の平面 ($+\sigma$) からの寄与の重ね合わせである ($\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_{(+)} + \mathbf{E}_{(-)} = 2\mathbf{E}_{(+)}$)。この面に対する電場の流束は、

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = EA$$

- (2) 面 S_2 : a. の場合の (6) の結果から、面 S_2 では電場はゼロであり、

$$\mathbf{E}_2 = 0$$

従って、電場の流束はゼロになる。

- (3) (1) (2) から、この直方体の面全体に対する電場の流束は、

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS = EA$$

- (4) 一方、この直方体の内部の電荷は、 $+\sigma A$ である。

- (5) (3) (4) より、

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(3.4.13)

面 B について同様なような直方体 (閉曲面) を考え、ガウスの法則を適用しても同様の結果を得る。2 枚の無限に広がる平行平板に挟まれる領域での電場の大きさ 式(3.4.13) は、一枚の無限平板の場合の電場の大きさ 式(3.4.9) の 2 倍になっていることがわかる。

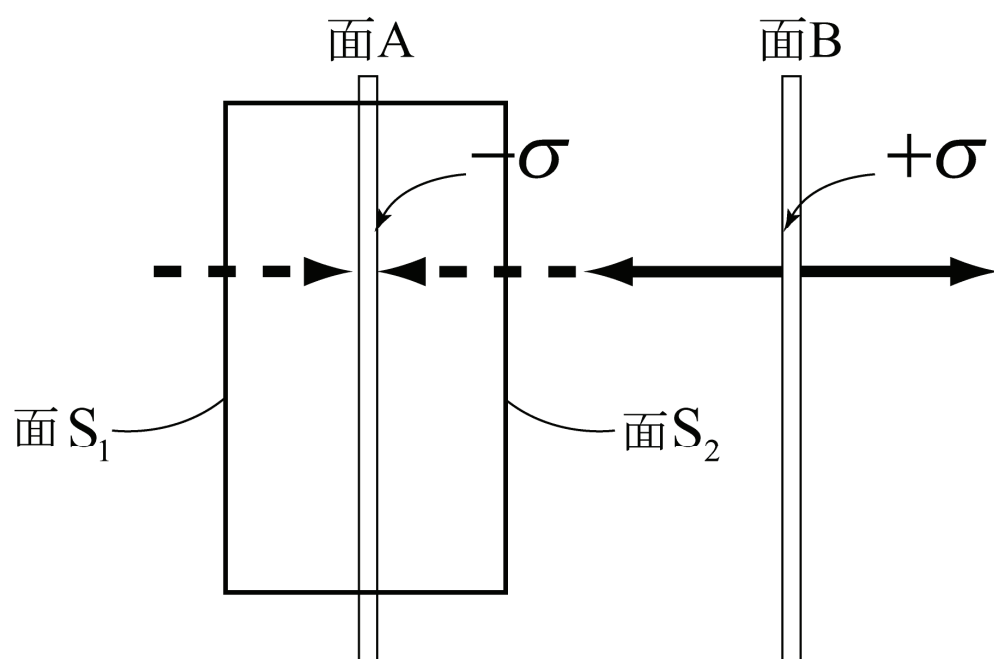
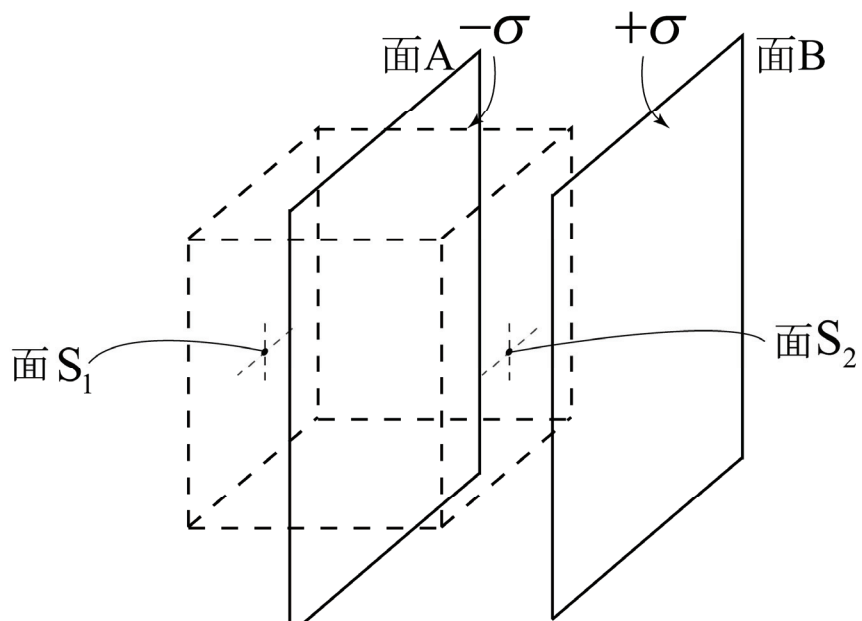


図 3. 4. 6 面 A、面 B に挟まれた領域での電場を求めるための閉曲面

3. 3. 3 球状電荷の場合：球対称性のある場合

図3. 4. 7のような半径 a の球体に一様に電荷が分布し、球体の外側では電荷は無いとする。従って、電荷密度の空間分布 $\rho_e(r)$ は、

$$\rho_e(r) = \begin{cases} \rho_e (= \text{const.}) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r) \end{cases} \quad (3.4.14)$$

で与えられる。

この場合には、空間の点 $P(x, y, z)$ において、電場 $\mathbf{E}$ は径方向 ($\mathbf{r}$ 方向) 成分しか持たないこと、また、電場の大きさは、原点から点 P までの距離が同じであれば同じになることは、直観的に容易に推測される。そこで、この球体と同心球となるような積分面を考え、ガウスの法則を適用する。

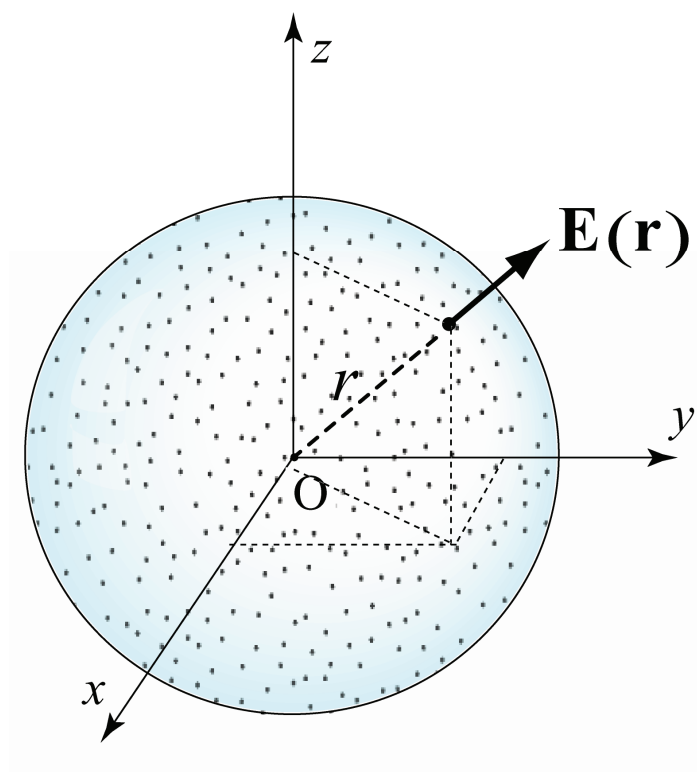


図3. 4. 7 球状電荷分布

(点 P が球体の内部にある場合： $0 < r < a$ の場合)

図の点線のような原点から点 P までの距離 r を半径とする球面を考える。この球面上で電場は一定であり、また、その方向は面上の各点で面と垂直（法線方向と一致する）から、電場の流束は（電場の大きさ） $\times$ （半径 r の球の表面積）となる。

$$(\text{半径 } r \text{ の球面をとる電場の流束}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \cdot (4\pi r^2) \quad (3.4.15)$$

一方、この球面内の電荷は、電荷密度が一定であるから

$$(\text{半径 } r \text{ の球面内の電荷}) / \epsilon_0 = \frac{\int_0^r \rho_e(r') 4\pi r'^2 dr}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \rho_e}{\epsilon_0} \quad (3.4.16)$$

となる。従って、

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \rho_e}{\epsilon_0} \quad (3.4.17)$$

$$\therefore E = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} r$$

(3.4.18)

(点 P が球体の外部にある場合： $a < r$ の場合)

上と同様にして、電場の流束は

$$(\text{半径 } r \text{ の球面をとる電場の流束}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \cdot (4\pi r^2) \quad (3.4.19)$$

一方、電荷密度 ρ_e は、式 (3.4.14) で与えられ、半径 a の球面外ではゼロとなるから

$$(\text{半径 } r \text{ の球面内の電荷}) / \epsilon_0 = \frac{\int_0^r \rho_e(r') 4\pi r'^2 dr}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^a \rho_e(r') 4\pi r'^2 dr}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4\pi}{3} a^3 \rho_e}{\epsilon_0} \quad (3.4.20)$$

従って、

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\frac{4\pi}{3} a^3 \rho_e}{\epsilon_0} \quad (3.4.21)$$

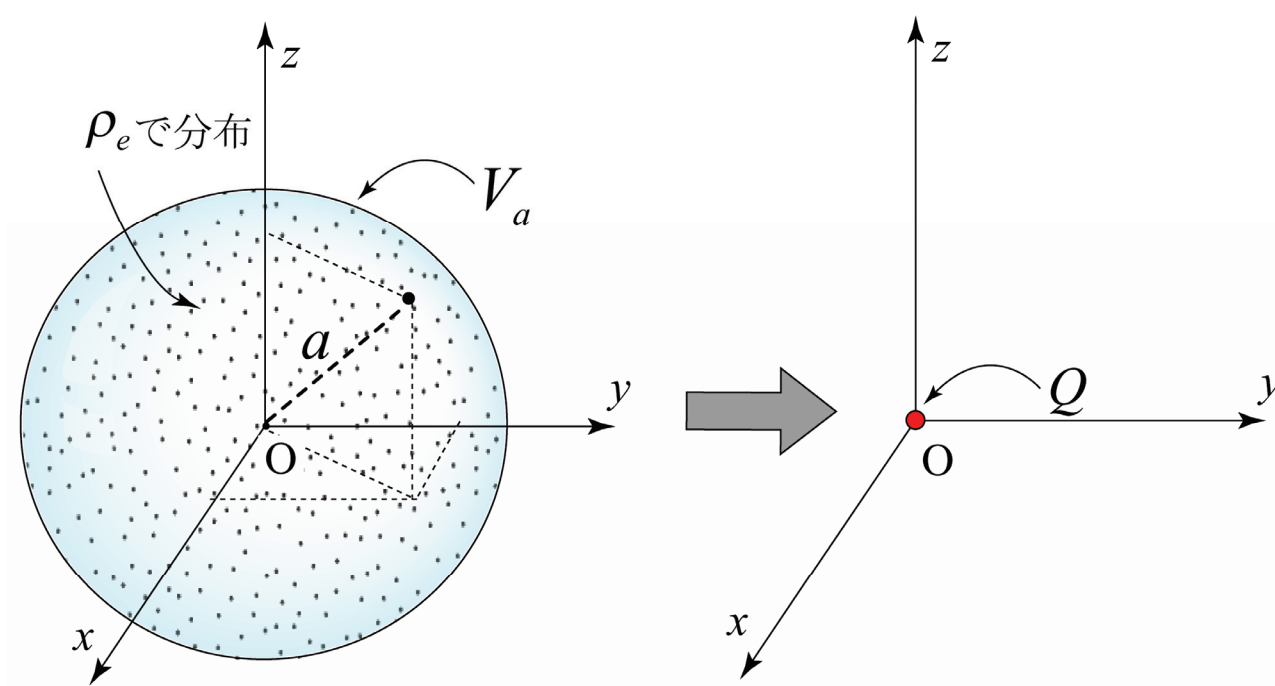
ここで、右辺の分子は、半径 a の球体内にある全電荷 Q に等しい。すなわち、 $(4\pi/3)a^3$ は、半径 a の球体の体積 V_a に等しく、全電荷 Q は (電荷密度) $\times$ (体積)、

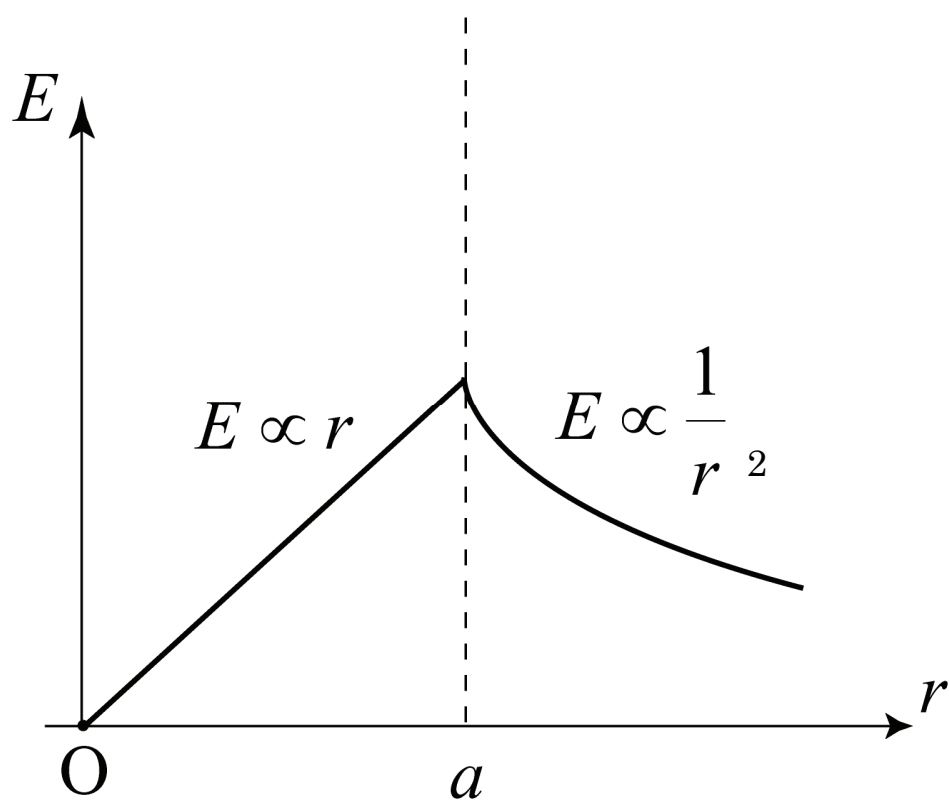
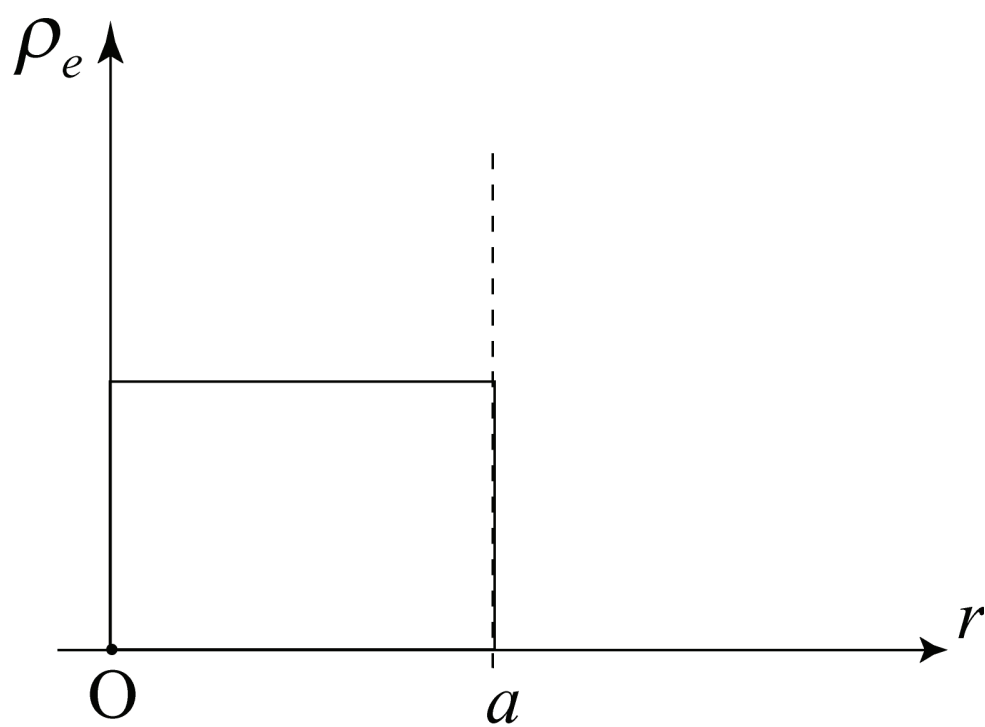
$$Q = \rho_e V_a = \rho_e \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right) \quad (3.4.22)$$

で表される。これから、球体外部の点における電場は

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (3.4.23)$$

となる。原点に置かれた点電荷の場合、式 (2.2.4) と比較すると、 $q \rightarrow Q$ になっただけで形は全く同じである。特に、この球体から十分離れた点 ($a \ll r$) からみれば、この球体を電荷 Q の点電荷とみなすことができる。直観的な見方と一致する。





問1 太さが無視できる無限の長さをもつ線状電荷（線電荷密度 $\lambda = 1 \times 10^{-12} \text{ C/m}$ ）から距離 0.1m の距離における電場の強さを求めよ。

問2 厚さが無視できる無限平板が面電荷密度 $\sigma [\text{C/m}^2]$ で一様に帯電している。

- (1) この平板から距離 0.01m の点における場所での電場の大きさが 100 N/C で、方向が面に向かう向きであるとき、面電荷密度を求めよ。
- (2) (1) の条件のもとで、この平板から距離 0.1m における電場の大きさを求めよ。

問3 厚さの無視できる無限に広い2枚の平行平板が、各々、 $+\sigma [\text{C/m}^2]$ 、 $-\sigma [\text{C/m}^2]$ の面電荷密度で一様に帯電している場合の電場については、すでに本文中で考えた。もし、2枚とも同じ符号の電荷、すなわち、 $+\sigma [\text{C/m}^2]$ に帯電している場合、2枚の平行平板の内側、外側の領域の電場を求めよ。

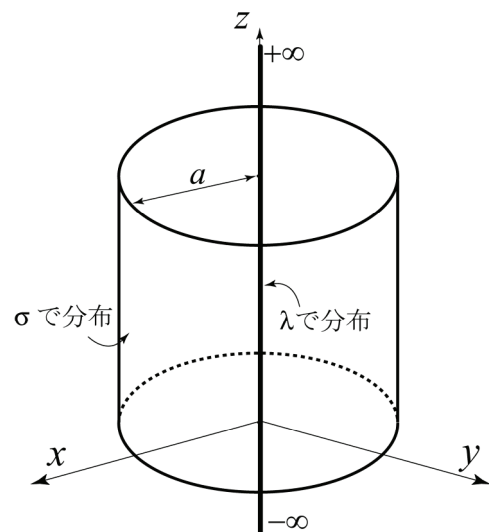
問4 厚さの無視できる無限に広い3枚の平行平板がある。各々、 $+\sigma [\text{C/m}^2]$ 、 $+\sigma [\text{C/m}^2]$ 、 $-2\sigma [\text{C/m}^2]$ の面電荷密度で一様に帯電している。空間の各点での電場を求めよ。

問5 長さが無限の円筒面上に、面電荷密度 σ で電荷が一様に分布している。ただし、この無限円筒の半径を a とする。次の問に答よ。

- (1) この円筒の内側 ($0 \leq r \leq a$) 及び外側 ($a \leq r$) における電場の大きさを求めよ。
- (2) (1) で求めた電場を、 r の関数として図示せよ。
- (2) 円筒面の外側で、円筒面からの距離が 0.01m の点で、電場の大きさが 1.5 N/C のとき面電荷密度を求めよ。

問6 図に示すように無限の長さをもつ線状電荷（線電荷密度 λ ）を囲んで、厚さが無視でき、かつ、無限の長さを持つ円筒面がある。円筒面の半径は a であり、面電荷密度 σ で一様に分布しているとする。

- (1) この円筒面の内側 ($0 \leq r \leq a$) と外側 ($a \leq r$) における電場の大きさを求めよ。
- (2) (1) で求めた電場を、 r の関数として図示せよ。

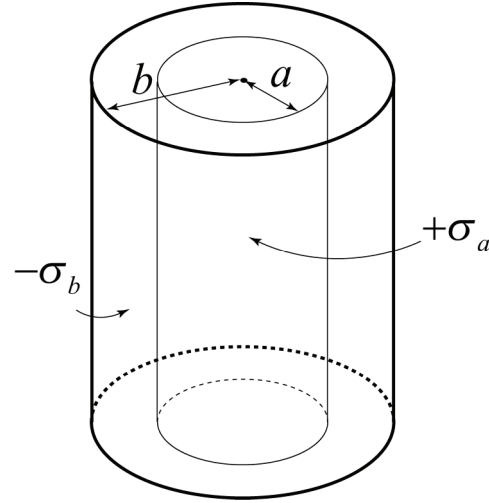


問7 図のように半径 a 、半径 b の同軸無限円筒を考える。両者とも厚さは無視できる。各々の円筒の面電荷密度は、各々、 $+\sigma_a[\text{C/m}^2]$ 、 $-\sigma_b[\text{C/m}^2]$ で電荷は面上で一様に分布している。

(1) 次の各領域における電場を求めよ。

- i) $0 < r < a$,
- ii) $a < r < b$,
- iii) $b < r$

(2) (1) の結果を図示せよ。

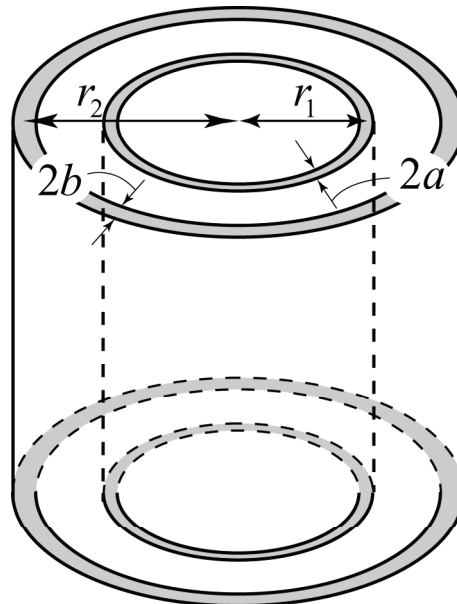


問8 図のように二本の同軸無限円柱がある。内側、外側の円柱の厚みを、各々、 $2a, 2b$ とする。内側、外側の円柱の体積内では、電荷は一様に分布している。内側、外側の円柱の電荷密度を、各々、 ρ_e^a, ρ_e^b とする。

(1) 次の各領域の電場を求めよ。

- i) $0 < r < r_1 - a$,
- ii) $r_1 - a < r < r_1 + a$,
- iii) $r_1 + a < r < r_2 - b$,
- iv) $r_2 - b < r < r_2 + b$,
- v) $r_2 + b < r$

(2) (1) の結果を図示せよ。



r_1, r_2 は、中心から厚みの中心まで

問9 図のように、半径 a 、半径 b の厚さが無視できる二つの同心球面を考える。電荷は面電荷密度 $+\sigma_a[\text{C/m}^2]$ 、 $-\sigma_b[\text{C/m}^2]$ で、電荷は面上に一様に分布している。

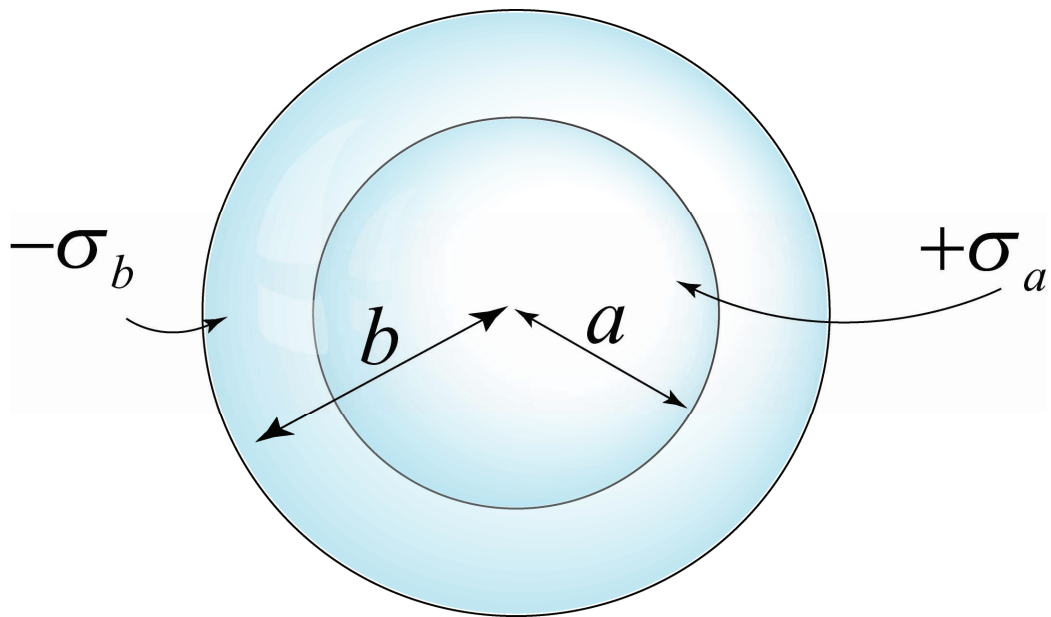
(1) 次の各領域における電場を求めよ。

i) $0 < r < a$,

ii) $a < r < b$,

iii) $b < r$

(2) (1) の結果を図示せよ。



3. 5 まとめ Quiz

1. ガウスの法則 (積分形)

(点電荷の場合)

空間に閉曲面 S を考える。閉曲面 S に囲まれた領域 V で表す。この領域内に N 個の点電荷 q_j ($j=1,2,\dots,N$) があるとき、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS =$$

言葉で表現すると

閉曲面 S に関する “電場の流束” = $\frac{(\quad)}{\epsilon_0}$

(連続した電荷分布の場合)

非常に多くの電荷があり、連続的に電荷が分布するとみなせるときには、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS =$$

ここで、 $\rho_e(\mathbf{r})$ は、空間の点 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ における

を表す。

2. ガウスの法則 (微分形)

微分形のガウスの法則は、次式のように表される。

$$= \frac{\rho_e(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

これを言葉で表現すると、

$$\boxed{} = \frac{\text{(点}(x, y, z)\text{)における電荷密度}}{\epsilon_0}$$

(クーロンの法則とガウスの法則)

原点にある点電荷を囲む閉曲面 S を考える。このとき、電場 $\mathbf{E}$ について、クーロンの法則 式(2.2.3)

$$\mathbf{E} = \boxed{}$$

を適用すると、この閉曲面に関する電場の流束は、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \boxed{}$$

となる。

(微分形のガウスの法則と積分形のガウスの法則)

空間中に閉曲面 S を考える。この閉曲面に囲まれる領域を V とし、電場 $\mathbf{E}$ について、第 I 編 § 4. 3 のガウスの定理 式(4.3.3) を適用すると、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

となる。このとき、右辺の $\nabla \cdot \mathbf{E}$ に上の微分形のガウスの法則 を用いると、

$$\boxed{} \quad \text{が得られる。}$$

4. ガウスの法則の応用

1) ガウスの定理は、考えている系に がある場合に有効になる場合が多い。

2) 無限に長い線状電荷に一樣に電荷が分布する場合、電場はこの線状電荷を中心軸として、軸対称となる。従って、ガウスの法則を適用するには、こ

の線状電荷を取り囲む 面を考える。

3) 厚さの無視できる無限平板に電荷が一樣に分布している場合には、

・空間の各点で、電場 $\mathbf{E}$ は、この面に な成分しか持たない。

・また、平板の両側で電場の大きさは等しく、板上の面電荷密度を σ とすると、その大きさは、

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

で与えられる。

3) 原点にある点電荷の場合のように、系に 対称性がある場合には、

電場は、 成分しか持たない。また、原点を囲む球面上の各点で、

電場の大きさは、 である。

4. 静電ポテンシャル (電位)

4. 1 静電場：渦なし場

静電場では、クーロンの法則から原点にある点電荷 q による電場は、式(2.2.4)から

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (4.1.1)$$

で与えられる。ただし、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.1.2)$$

であり。このとき、第I編 § 3. 4 問 8 ですでに確かめたように

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (4.1.3)$$

が一般に成り立つ。従って、静電場では

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4.1.4)$$

となる。すなわち、静電場は渦なし場であり、従って、第I編 § 3. 5、§ 4. 5 問 6、§ 4. 6 で学んだように、静電場はスカラーの勾配によって、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (4.1.5)$$

表すことができる。ここで、 ϕ を静電ポテンシャル (電位) と呼ぶ。

さらに、第I編 § 3. 1 問 9 で確かめたように、

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (4.1.6)$$

であるから、式(4.1.1)と比較することにより、原点に置かれた点電荷による電場

に対して、静電ポテンシャルは、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.1.7)$$

で与えられる。

問 1 式(4.1.3)を再度確かめよ。

問 2 式(4.1.6)を再度確かめ、静電ポテンシャル 式(4.1.7) 及び その勾配 式(4.1.5)から、電場 式(4.1.1) が得られることを確かめよ。

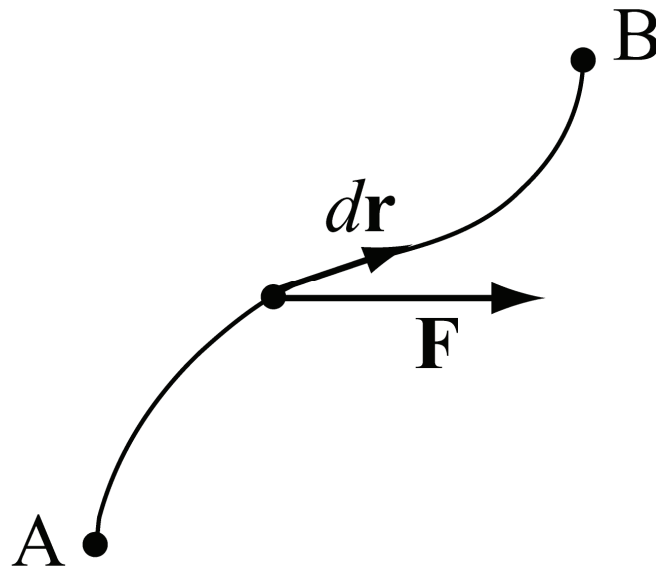
4. 2 静電ポテンシャル（電位）とその物理的意味

4. 2. 1 保存力場と位置エネルギー

質点が力場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ のもとで、空間の点 A から点 B まで移動する。このとき、力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ による仕事

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2.1)$$

を考える。



保存力場の場合には、力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は位置エネルギー $U(\mathbf{r})$ の勾配として、

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (4.2.2)$$

で与えられる。ここで、勾配の前の負号は、力の方向が U の勾配の方向と逆向きであることを意味する。すなわち、力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は、位置エネルギー U の大きい方から小さい方へ向かうことを意味している。保存力場の場合、式(4.2.1)の W は

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B (-\nabla U) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\ &= - \int_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = - \int_A^B dU \end{aligned}$$

$$\therefore W = U(A) - U(B) \quad (4.2.3)$$

となる。これから、

保存力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ のもとで、質点が点 A から点 B まで移動するとき、力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が質点にする仕事 W は、

- 1) 点 A から点 B にいたる経路によらない、
- 2) 点 A における位置エネルギーと点 B における位置エネルギーとの差 $U(A) - U(B)$ にのみ依存する。

位置エネルギーの大きさは、基準点の選び方による。点 A を位置エネルギーの基準点に選ぶ [$U(A)=0$] と、式(4.2.3)から

$$W = -U(B) \quad (4.2.4)$$

となる。従って、点 A を位置エネルギーの基準に選ぶと、点 B における質点の位置エネルギーは、

$$U(B) = -W = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2.5)$$

と表すことができる。

4. 2. 2 静電ポテンシャルの物理的意味

(静電場中に置かれた点電荷の位置エネルギー)

電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に置かれた点電荷 q' の受ける力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q'\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.2.6)$$

静電場の場合には、式(4.1.5)から $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ であるから、上の保存力場の場合と同様、力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{F} = -\nabla(q'\phi) \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\nabla U \quad (4.2.7a)$$

$$q'\phi \Leftrightarrow U \quad (4.2.7b)$$

の形になる。すなわち、静電場による力の方は、保存力場と考えることができる。これから、静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 中に置かれた点電荷 q' に対して

電荷 q' と静電ポテンシャル ϕ の積 $q'\phi$ は、
保存力場における位置エネルギー U に相当する

ことがわかる。

(クーロン力のする仕事)

静電場中、すなわち、クーロン力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q'\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の作用のもとで、点電荷 q' が空間の点 A から点 B まで、移動するとき、力が点電荷にする仕事は、

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B q'\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q' \int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= -q' \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = -q' \int_A^B d\phi \\ &= -q'[\phi(B) - \phi(A)] \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

式(4.2.3)と同様、仕事は点 A から点 B に至る経路にはよらない。点 A と点 B における静電ポテンシャルの差 $\phi(B) - \phi(A)$ にのみ依存する。

特に、単位電荷 $q' = 1C$ の場合を考えると、

$$W = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B d\phi = \phi(A) - \phi(B) \quad (4.2.9)$$

となる。 $\phi(B)$ を点 A に対する点 B の電位、また、 $\phi(B) - \phi(A)$ を点 B と点 A との電位差と呼ぶこともある。点 A を静電ポテンシャル（電位）の基準点にとると、点 B の静電ポテンシャル（電位）は、式(4.2.5)と同様にして

$$\phi(B) = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

(4.2.10)

として与えられる。これから、

静電ポテンシャル（電位）は、単位電荷（ $q'=1\text{C}$ ）を
クーロン力と反対の方向に（クーロン力に逆らって）点 A から点 B まで
移動させるのに必要となる仕事

として理解することもできる。

4. 2. 3 クーロン力による仕事と静電ポテンシャル

§ 4. 1 では、静電場が渦なし場であることをもとに、電場が静電ポテンシャルによって導かれることを示した。ここでは、前節で考えた静電ポテンシャルの物理的意味を踏まえ、クーロン力による仕事を計算することによって、静電ポテンシャルが式(4.1.7)のように表されることを示す。

クーロン力に逆らって、クーロン力とは反対方向に、単位電荷 $q'=1\text{C}$ を点 $A(r=r_A)$ から点 $B(r=r_B)$ まで移動するために、外部から加えなければならない仕事は、

$$W' = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2.11)$$

ここで原点に置かれた点電荷よる電場は、式(4.1.1)で与えられるから、

$$W' = - \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2.12)$$

電場の方向は空間の各点で、径方向を向く。従って、上の積分は積分の経路によらない（第 I 編 § 4. 1 問 9 参照）。そこで、 $d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_r = (\mathbf{r}/r)$ にとると、

$$\begin{aligned} W' &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

となる。式(4.2.7)と比較すると、これは点 B と点 A における静電ポテンシャルの差

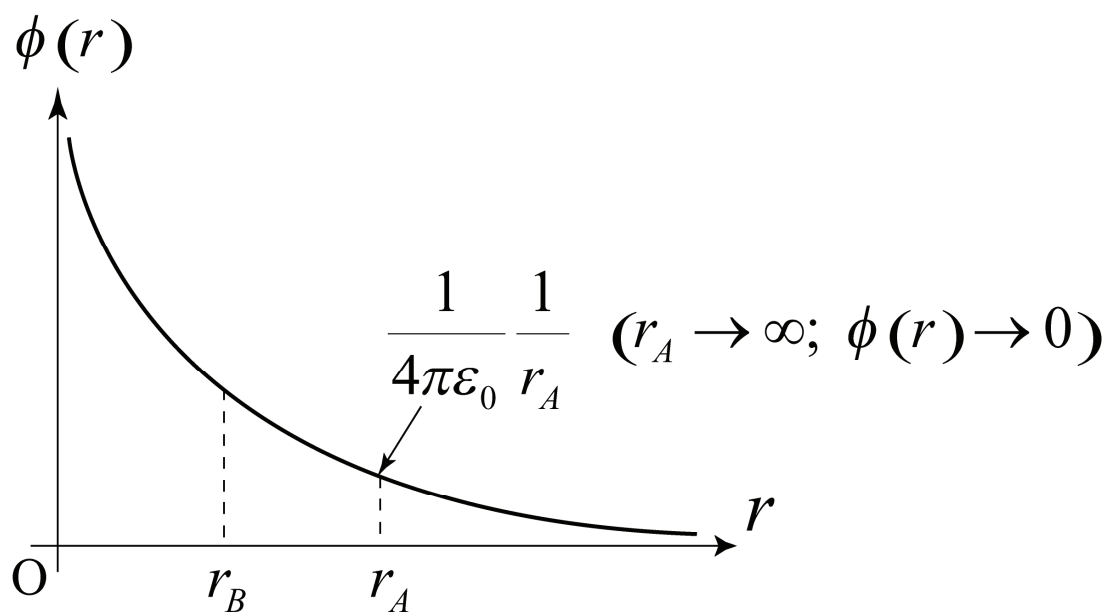
$$\therefore W' = \phi(r_B) - \phi(r_A) \quad (4.2.14)$$

に等しいことがわかる。

前節で述べたように、静電ポテンシャルは位置エネルギーに相当しており、この場合、無限遠方 $r = \infty$ を位置エネルギーの基準にとると、空間の任意の点における単位電荷 $q' = 1\text{C}$ が持つ位置エネルギーの大きさは、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.2.15)$$

となることがわかる。



4. 2. 4 静電ポテンシャル(電位)の単位

静電ポテンシャル (電位) の単位として、V (ボルト) を用いる。

$$\phi \quad : \quad \text{V} \quad (\text{ボルト : Volt}) \quad (4.2.16)$$

上で説明したように静電ポテンシャル(電位)は、単位電荷 ($q'=1\text{C}$) をクーロン力に逆らって点 A から点 B まで移動するために必要となる仕事 (エネルギー) であった。

今、 $q'\text{C}$ の電荷を電場に逆らって点 A から点 B まで移動させたときの仕事は、

$$W' = - \int_{\infty}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r (q'\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{J}) \quad (4.2.17)$$

点 A を基準に選ぶと、

$$\therefore W' = q' \left[- \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right] = q' \phi(r) \quad (\text{J}) \quad (4.2.18)$$

従って、

$$\phi(r) = \frac{W'}{q'} \quad (\text{V}) \quad (4.2.19)$$

となる。これから 1 V は

$$1 \text{ (V)} = 1 \left(\frac{\text{J}}{\text{C}} \right) \quad (4.2.20)$$

に相当することがわかる。

§ 2. 2 で電場の単位が N/C になることを学んだ。静電ポテンシャルの単位である V を用いると電場の単位は、

$$\mathbf{E} \quad : \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4.2.21)$$

となる。実際上には、電場の単位として V/m を用いることが多い。

(eV 単位：エネルギーの単位)

点 A と点 B との電位差が 1 ボルトであるとき、この 2 点間をクーロン力に逆らって、素電荷

$$e = 1.601 \times 10^{-19} \text{ C}$$

を移動させるときに必要な仕事（エネルギー）を 1 eV と定義する。式から

$$W' = e\phi = (1.601 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1 \text{ V}) = 1.601 \times 10^{-19} \text{ J}$$

すなわち、

$$1 \text{ eV} = 1.601 \times 10^{-19} \text{ J}$$

(4.2.22)

である。

問1 保存力場の場合に全力学エネルギー（運動エネルギーと位置エネルギーの和）が保存されることを次の手順により示せ。

(1) 運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

の両辺に速度を内積をとると、

$$m\mathbf{v} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

となる。ここで、左辺は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

に等しくなることを示せ。

(2) 一方、右辺は、保存力場の場合、式(4.2.2)より $\mathbf{F} = -\nabla U$ であり、また、 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ であるから、

$$-\frac{dU}{dt}$$

になることを示せ。

(3) (1) (2) より、全力学エネルギーの保存、

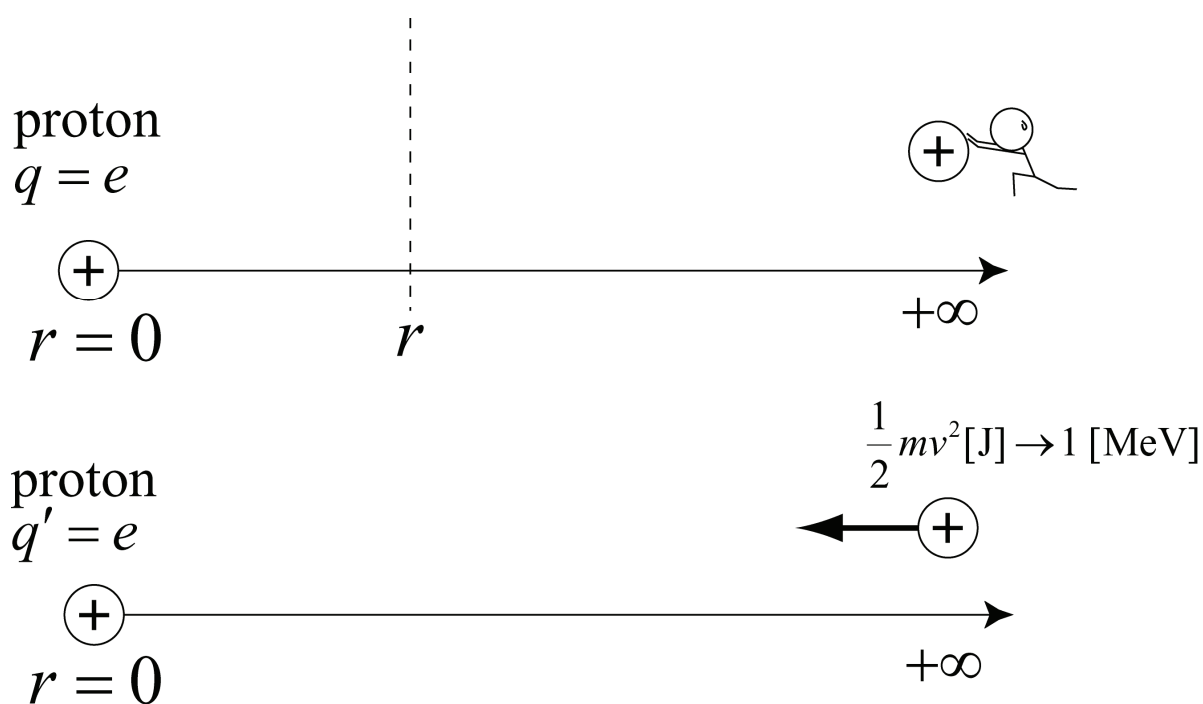
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + U(\mathbf{r}) \right] = 0$$

が成立することを確かめよ。

(4) クーロン力場 $\mathbf{F} = -q\nabla\phi$ の場合、(3) はどのように表されるか？

問2 原点に固定された陽子 $q=e$ ($e=1.601\times 10^{-19}$ C) がつくる静電場について次の問に答よ。

- (1) 静電ポテンシャル $\phi(r)$ の“概略”の様子を、原点からの距離 r の関数として示せ。
- (2) 無限遠方から別の陽子 $q'=e$ を、原点から r だけ離れた点まで運ぶために外部から加えなければならない仕事を求めよ。
- (3) 無限遠方において、 $1\text{MeV}(=1\times 10^6\text{eV}=1.6\times 10^{-13}\text{J})$ の運動エネルギーをもつ陽子は、原点にある陽子にどこまで近づけるか？



問3 電場の大きさを表す単位が V/m となることを確かめよ。

4. 3 多数の電荷がある場合の静電ポテンシャル

前節までは、主として点電荷が原点にある場合についての静電ポテンシャルを考えてきた。ここでは、より一般的に多数の電荷が存在する場合を考える。

4. 3. 1 N 個の点電荷

§ 2. 3 重ね合わせの原理で説明したように、N 個の点電荷 q_j ($j=1,2,\dots,N$) による電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{R_j^2} \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j} \right) \quad (4.3.1)$$

と表された。ここで、 $\mathbf{R}_j$ は考えている空間の点の位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 、また、 j 番目の電荷の位置ベクトルを $\mathbf{r}_j = x_j\mathbf{i} + y_j\mathbf{j} + z_j\mathbf{k}$ とすると

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \quad R_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \quad (4.3.2)$$

で与えられる。

電場の場合と同様、静電ポテンシャルについても同様に重ね合わせの原理が成立する。すなわち、N 個の点電荷がある場合の静電ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{r}), \quad \phi_j(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_j} \quad (4.3.3)$$

このことは次のようにして容易に確かめらる。 $\phi(\mathbf{r})$ を上の式のように与えたとき、電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{R_j} \right) \quad (4.3.4)$$

ここで、

$$\nabla\left(\frac{1}{R_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_j}\right)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_j}\right)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_j}\right)\mathbf{k} \quad (4.3.5)$$

これから

$$\therefore \nabla\left(\frac{1}{R_j}\right)=-\frac{1}{R_j^2}\left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j}\right) \quad (4.3.6)$$

これを式(4.3.4)に代入すると、結果は式(4.3.1)に一致する。

4. 3. 2 連続的な電荷分布

空間中に多数の電荷が存在し、連続した電荷分布とみなすことができる場合、
§ 2. 4 式(2.4.1)で定義した電荷密度 $\rho(\mathbf{r}_j)$ を用いることができる。このとき、
 電場について式(2.4.4)を導いたのと同様な考え方に基づいて、静電ポテンシャル
 は式(4.3.3)で $q_j \rightarrow \Delta q_j = \rho(\mathbf{r}_j)\Delta V_j$ として、

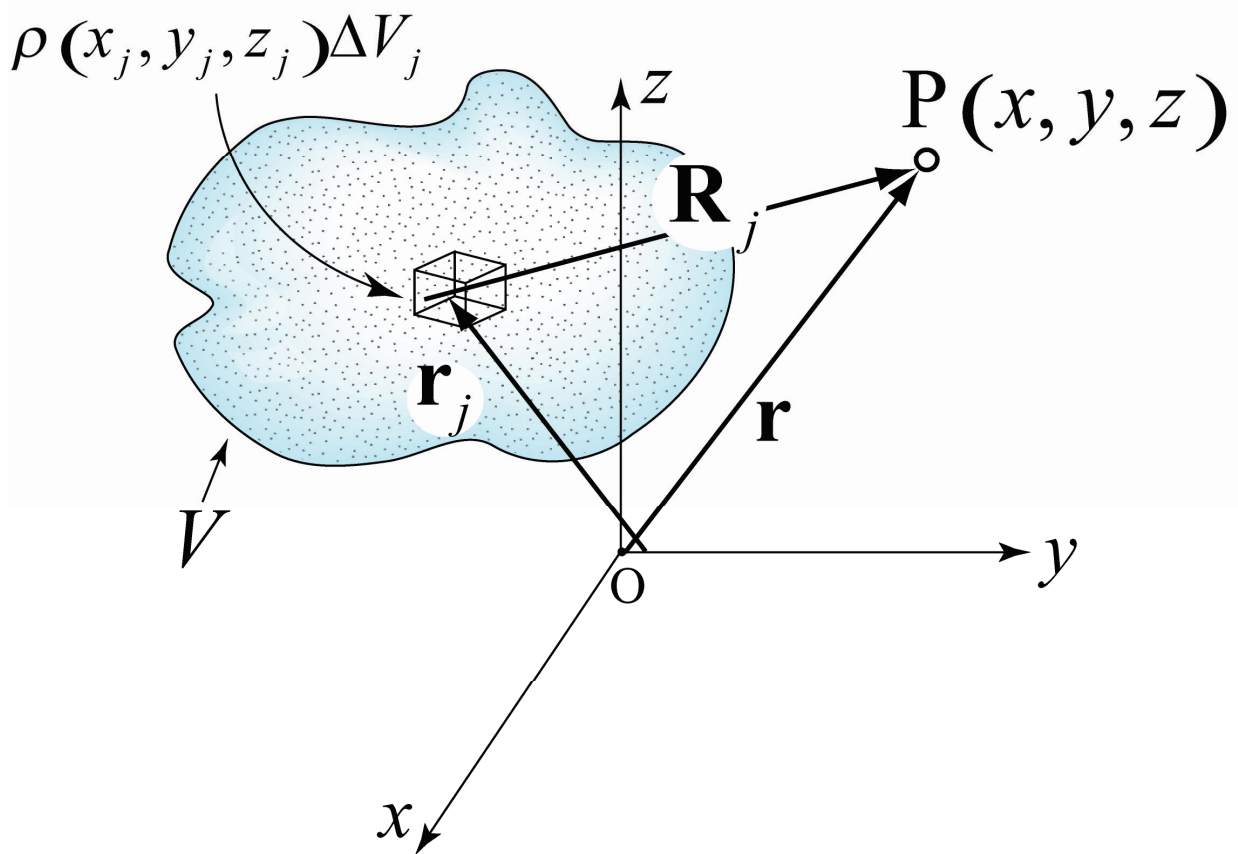
$$\phi(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^N\phi_j(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^N\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(x_j,y_j,z_j)}{R_j}\Delta V_j \quad (4.3.7)$$

となる。さらに、Nを十分大きくとった極限では、この和は次の積分として、

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(x_j,y_j,z_j)}{R_j}dV_j$$

(4.3.8)

と表すことができる。ただし、積分は電荷を含む全空間にわたって行う。



問1（電気双極子：再考！）

図のように、1対の正負（ $+q, -q$ ）電荷が、距離 d だけ離れて置かれている場合の電場については、§ 2. 3問2ですすでに取り上げた。このような1対の正負電荷がつくる場を双極子場と呼ぶ。電荷から十分離れた点 $P(x, y, z)$ において、電気双極子による静電ポテンシャルは、次式で与えられる。

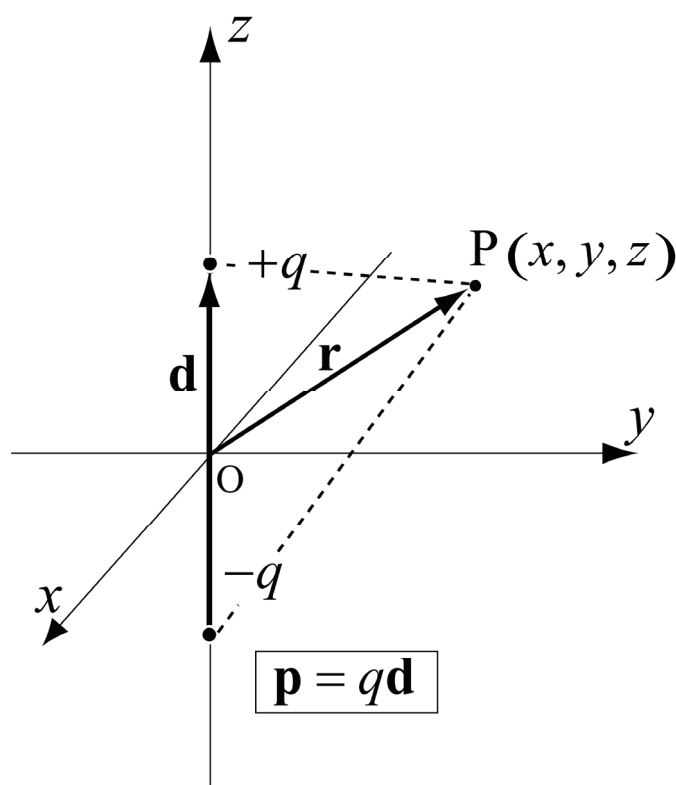
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p}}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (4.3.9)$$

ここで、 $\mathbf{r}$ は点 P の位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ を表し、また、 $\mathbf{p}$ は“双極子モーメント”（ベクトル）と呼ばれ、次のように定義される。

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = d\mathbf{k} \quad (4.3.10)$$

大きさ：電荷 q と電荷間の距離 d の積 qd

方向：負電荷から正電荷に向かう方向



電気双極子は、秋学期に誘電体の分極をモデル化していく際などに重要となる。
そこで、この問題について再び考えてみよう。

- (1) 電荷 $+q$ が、空間の点 $P(x, y, z)$ につくる静電ポテンシャル $\phi_+(x, y, z)$ を式で表せ。
- (2) 電荷 $-q$ が、空間の点 $P(x, y, z)$ につくる静電ポテンシャル $\phi_-(x, y, z)$ を式で表せ。
- (3) 正負 ($+q, -q$) の重ね合わせの結果、点 $P(x, y, z)$ における静電ポテンシャルは、次の式になることを確かめよ。

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right]$$

- (4) 二つの電荷の距離に比較して、十分遠い位置 $|z| \gg d$ を考えると、
($z \pm d/2 \approx z \pm zd$) から、次式が成り立つことを確かめよ。

$$x^2 + y^2 + (z - d/2)^2 \approx r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2} \right)$$

$$x^2 + y^2 + (z + d/2)^2 \approx r^2 \left(1 + \frac{zd}{r^2} \right)$$

$$\text{ただし、} r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- (5) (4) から $r^2 \gg |z|d$ のとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right)$$

ヒント：Taylor 展開により、 $X \ll 1$ のとき、

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{1 \pm X}} \approx 1 \mp \frac{1}{2} X$$

- (6) (5) より、(3) の $\phi(x, y, z)$ は、結果的に次のようになることを確かめよ。

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} qd$$

(7) 式(4.3.10)で定義される双極子モーメント $\mathbf{p} = (qd)\mathbf{k}$ を用いると

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pz = (qd)z$$

となることを示せ。これから、(6) は次の式になることを示せ。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p}}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

(8) 図で z 軸と考えている点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ とのなす角度を θ とすると、

$$z = r \cos \theta$$

あるいは、

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos \theta$$

より、(7) の静電ポテンシャルは、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p \cos \theta}{r^2} \right)$$

と書くこともできる。

問2 問1では、電気双極子による静電ポテンシャルが式(4.3.9)のようになることを確かめた。静電ポテンシャルが求まれば、電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

から計算できる。式(4.3.9)で $\psi_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}, \psi_2 = 1/r^3$ と置くと、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\psi_1 \psi_2)$$

と表すことができる。このとき、次の問に答よ。

(1) $\nabla \psi_1 = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$ であることを示せ。(第I編 § 3. 2 問1 参照)

(2) $\nabla \psi_2 = \nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ であることを示せ。

(3) $\nabla(\psi_1 \psi_2) = \psi_2 \nabla \psi_1 + \psi_1 \nabla \psi_2$ を示せ。[第I編 § 3. 2 式(3.2.3)]

(4) $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 及び (1) (2) (3) の結果から

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right]$$

(4.3.11)

となることを示せ。

(5) 電場の E_x, E_y, E_z 成分を示せ。

(6) (5) から z 軸上で電場は z 成分だけであることを示せ。これと本編 § 2. 3 問 2 (4) で求めた E とが等しくなることを確かめよ。

問 3 § 2. 4 問 3 と同じ太さが無視できる半径 a の線状リングを考える。

(1) 空間の点 $Q(0,0,z)$ における静電ポテンシャルを、式(4.3.8)

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x_j, y_j, z_j)}{R_j} dV_j$$

から求めよ。

ヒント：§ 2. 4 問 3 と同様に考え

$$\rho(x_j, y_j, z_j) dV_j \rightarrow \lambda a d\theta$$

$$R_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + z^2}$$

(2) $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ より、点 Q における電場を求めよ。

(3) 上の (2) の結果と § 2. 4 問 3 (5) の結果とを比較せよ。

問 4 § 2. 4 問 5 と同じ厚さが無視できる半径 a の円板上ディスクに電荷が一樣に分布している場合を考える。

(1) 上の問 3 と同様に、式(4.3.8)を用いて空間の点 $Q(0,0,z)$ における静電ポテンシャルを求めよ。

ヒント：§ 2. 4 問 5 と同様に考え

$$\rho(x_j, y_j, z_j) dV_j \rightarrow \sigma \Delta S = \sigma r dr d\theta$$

$$\text{ただし、} r = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$$

$$R_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

として、 r と θ についての面積分は、円板全体

$$0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

にわたって行う。

(2) $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ より、点 Q における電場を求めよ。

(3) 上の (2) の結果と § 2. 4 問 5 (3) の結果とを比較せよ。

(4) 上の (1) の結果で、円板の半径 a が、原点から考えている点までの距

離に比較して十分大きい($a^2 \gg z^2$)とき、静電ポテンシャルは、次の式で与えられることを示せ。

$$\phi(0,0,z) = \phi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z, \phi_0 = \text{const.}$$

- (5) (4)の結果から、円板の半径が十分大きい場合の電場は、場所によらず一定となり、次の式で与えられることを示せ。

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

これを § 2. 4 問 5 (3) の結果とを比較せよ。

問5 これまで典型的ないくつかの場合について、電場と静電ポテンシャルの問題を学んできた。ここで、これらの問題を自分なりに下表に整理してみよ。

考えた場合	電場	静電ポテンシャル
原点に置かれた 点電荷	原点から距離 r の点 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) =$	原点から距離 r の点 $\phi(\mathbf{r}) =$
電気双極子 原点を挟んで、距離 d だけ はなれて置かれた 1 対の正負 $(+q, -q)$ 電 荷	空間の点 $\mathbf{P}(x, y, z)$ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right]$ ただし、 $\mathbf{p} =$	空間の点 $\mathbf{P}(x, y, z)$ $\phi(\mathbf{r}) =$
線状リング 線電荷 λ	z 軸上の点 $\mathbf{Q}(0, 0, z)$ $E_z(0, 0, z) =$	z 軸上の点 $\mathbf{Q}(0, 0, z)$ $\phi(0, 0, z) =$
厚さの無視できる 円板上ディスク 面電荷 σ	z 軸上の点 $\mathbf{Q}(0, 0, z)$ $E_z(0, 0, z) =$	z 軸上の点 $\mathbf{Q}(0, 0, z)$ $\phi(0, 0, z) =$
厚さの無視できる 無限平板 面電荷 σ	空間の点 (x, y, z) $E_z(x, y, z) =$	空間の点 (x, y, z) $\phi(x, y, z) = \phi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$

4. 4 等電位面と電気力線

第I編 § 3. 1で学んだように、スカラー量が2次元的な分布を持つとき、その勾配ベクトルの向きは、つねにスカラー量の等高線に垂直であることを学んだ。3次元の場合には、勾配ベクトルの向きは、スカラー量の“等高面”に垂直となる。静電ポテンシャルが等しい値をとる面を、とくに、等電位面と呼ぶ。

静電場では、電場は静電ポテンシャルの勾配として、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ で与えられる。従って、

静電場では電場ベクトルの向きは、等電位面に垂直な方向を向く。

また、空間の各点で電気力線の接線は、電場ベクトルの方向を向く。すなわち、

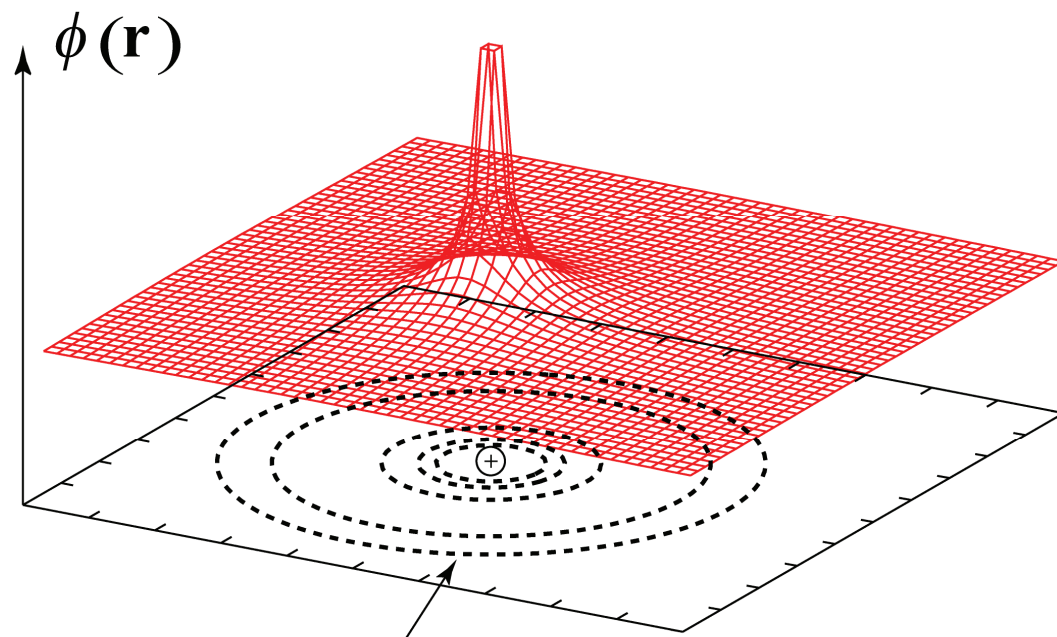
電気力線と等電位面は常に垂直に交わる。

ことがわかる。

原点に1個の点電荷がある場合、静電ポテンシャルは、

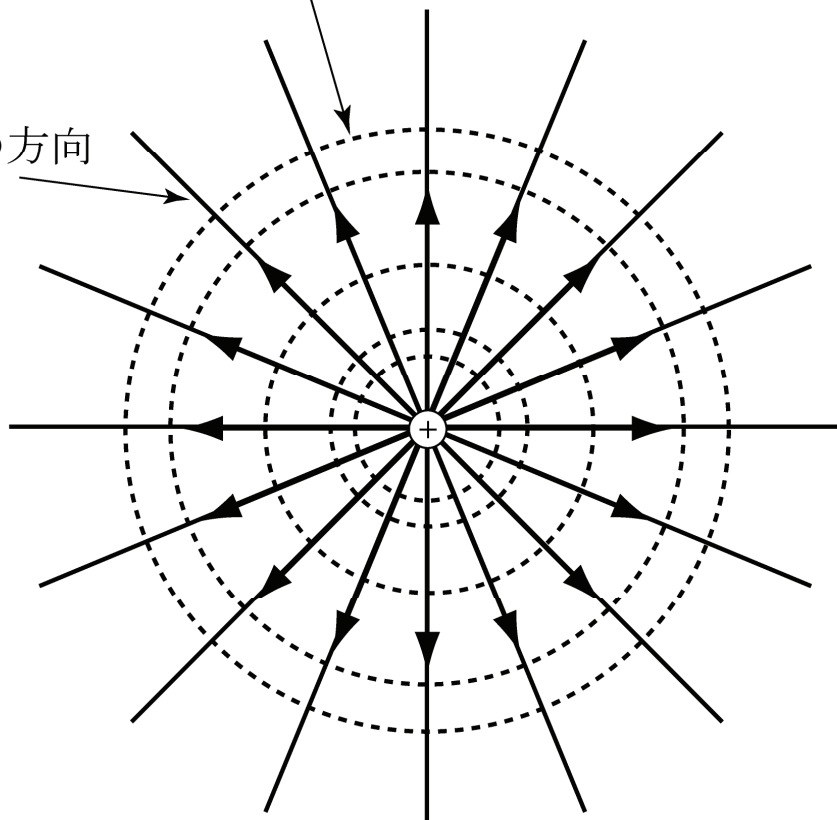
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)$$

で与えられた。従って、 $r = \text{const.}$ で $\phi = \text{const.}$ であり、原点を囲む球面が等電位面となる。また、電場は空間の各点で、その点をとる球面に垂直な方向、すなわち径方向を向く。図4. 4. 1に、 (x, y) 平面における電気力線と等電位面とを示す。

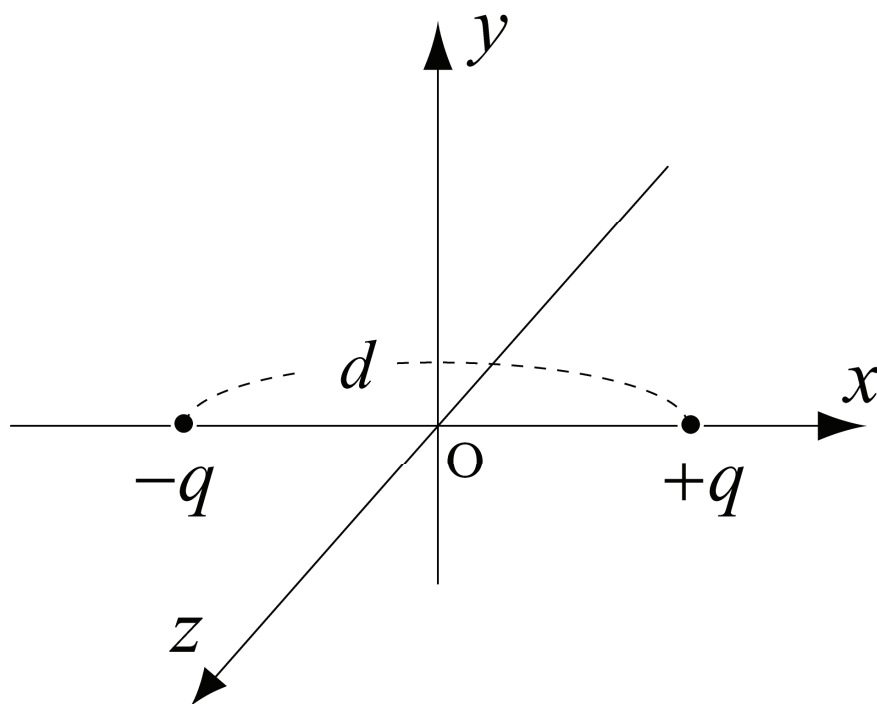


ϕ の等高線

$\mathbf{E}$ の方向



問1 図のように、1対の正負 $+q, -q$ 電荷が距離 d だけ離れて置かれているとき、 (y, z) 平面上で等電位面と電気力線の概略の様子を図示せよ。



問2 問1で電荷の符号が等しい $(+q, +q)$ 場合についても同様に、等電位面と電気力線の概略の様子を図示せよ。

5. 静電場の基本法則とポアソンの方程式

5. 1 静電場の基本法則

今までみてきたように、静電場の基本法則は次の2式に集約される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (5.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (5.1.2)$$

式(5.1.1)は、先に確かめたように静電場におけるクーロンの法則と同等のものである。実は、式(5.1.1)は後で学ぶように、静電場だけではなく、時間変化する電場の場合にも成立する。その意味では、式(5.1.2)、すなわち、電場の回転 $\nabla \times \mathbf{E}$ がゼロとなること、言い換えれば、静電場は“渦なし場”であることが、その大きな特徴といえる。これから、静電場は、静電ポテンシャルを用いて、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (5.1.3)$$

と表されることを § 4 で学んだ。

5. 2 電荷分布が与えられたときの電場

電場はベクトル場であり、3次元の問題では三つの成分を持つ。これに対して、静電ポテンシャルの場は、スカラー場である。実際、問題を解く場合には、スカラーである静電ポテンシャルを求め、その勾配から電場を求める方が容易なことが多い。

今、空間の各点 $\mathbf{r}'(x', y', z')$ での電荷分布 $\rho_e(\mathbf{r}') = \rho_e(x', y', z')$ が与えられたとき、点 $\mathbf{r}(x, y, z)$ における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z)$ を求める場合を考える。

系に対称性がある場合

方法1：§ 3. 4で学んだようにガウスの法則を用いると比較的に容易に問題が解ける場合が多い。

系に対称性がない場合

方法2：§2.4で学んだように、点 $\mathbf{r}(x, y, z)$ における電場 $\mathbf{E}(x, y, z)$ は、クーロンの法則をもとに、空間の各点にある電荷が、考えている点につくる電場を、重ね合わせることで、次の積分から求められる。

$$\rho_e(\mathbf{r}') = \rho_e(x', y', z')$$
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_e(x', y', z')}{R'^2} \left(\frac{\mathbf{R}'}{R'} \right) dV'$$

ここで、

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$R' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

上の電場の式は、ベクトルとして一つにまとめられているが、空間3次元の場合、電場の全ての成分を求めるには体積分を3回行う必要がある。

方法3：§4.3で学んだように、まず、空間の各点における静電ポテンシャルを求め、その勾配 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ から電場を求める方法。

$$\rho_e(\mathbf{r}') = \rho_e(x', y', z')$$
$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{R'} dV'$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

この場合、体積分は1回だけでよく、その代わり電場を求めるには静電ポテンシャルの勾配を求める必要があり、微分を計算する必要がある。積分に比較して微分の方が容易な場合が多い。

5. 3 ポアソンの方程式

ポアソン方程式は、以下しめすように静電場の基本法則を静電ポテンシャルを用いて一つの偏微分方程式にまとめて表現したものである。

静電場の場合、電場は静電ポテンシャルを用いて式(5.1.3)のように表すことができる。そこで、式(5.1.3)を式 (5.1.1)の左辺の $\mathbf{E}$ に代入すると

$$\begin{aligned}\text{式 (5.1.1)の左辺} &= \nabla \cdot (-\nabla \phi) \\ &= -\left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \\ &= -\nabla^2 \phi\end{aligned}$$

ここで、 ∇^2 は第I編 § 3. 3問11ですでに取り上げたラプラズ演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.3.1)$$

である。

故に、式(5.1.1)は、静電ポテンシャル ϕ についての次の偏微分方程式となる。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (5.3.2)$$

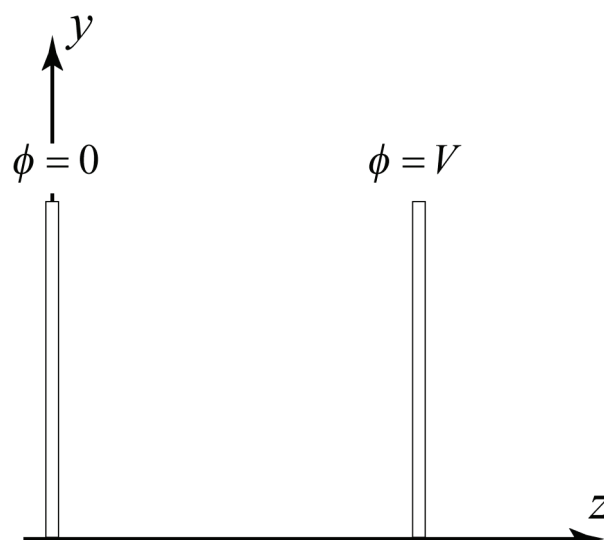
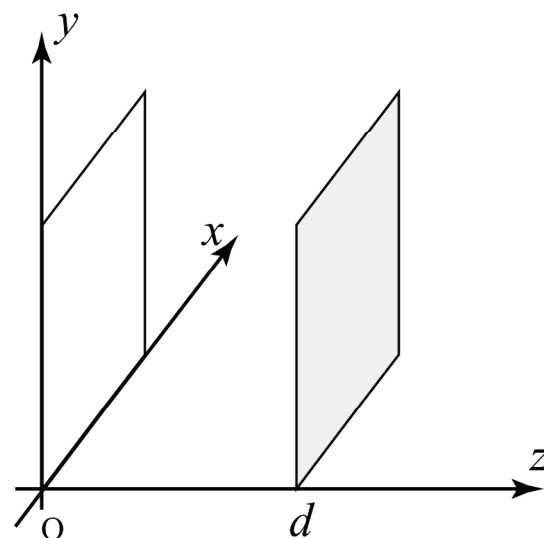
これをポアソンの方程式 (**Poisson's Equation**) と呼ぶ。とくに、電荷のない点 $\rho_e(\mathbf{r}') = \rho_e(x', y', z') = 0$ では、静電ポテンシャル ϕ は、次の偏微分方程式を満たす。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.3.3)$$

式(5.3.3)は、ポアソン方程式の特別な場合と考えることができる。式(5.3.3)は、ラプラスの方程式 (**Laplace's Equation**) と呼ばれる。

上で導いたポアソン方程式は、その導出過程からわかるように、静電場の基本法則を静電ポテンシャルを用いて一つの偏微分方程式にまとめて表現したものである。この偏微分方程式を解き、静電ポテンシャルが求めれば、前節 § 5. 2 の方法 3 と同様に、その勾配から電場を求めることができる。

ここでは、最も簡単な例として、2枚の無限平行平板の例について、ポアソンの方程式を解くことにする。図に示すように平板の面は、 (x, y) 面にあり、各々の平面は、 $z=0$ 及び $z=d$ に位置している。また、各々の平板の静電ポテンシャルの値は、 $\phi(z=0)=0$ 及び $\phi(z=d)=V$ に固定されており、平行平板間 ($0 < z < d$) には、電荷は無いとする。



このとき、ポアソンの方程式で電荷はゼロであるから、静電ポテンシャルは、次のラプラスの方程式に従う。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

これから、

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = C_1$$

ただし、 C_1 は積分定数である。ここで、さらにもう一度積分すると、

$$\phi(z) = C_1 z + C_2$$

を得る。 C_2 は、 C_1 と同様、積分定数である。

ここで、境界条件 $\phi(z=0)=0$ より、

$$\phi(0) = C_2 = 0$$

$$\therefore \phi(z) = C_1 z$$

さらに、境界条件 $\phi(z=d)=V$ より

$$\phi(d) = C_1 d = V$$

$$\therefore C_1 = \frac{V}{d}$$

以上より、上の境界条件を満たす2枚の平板間の静電ポテンシャルの分布は、ラプラスの方程式の解として、次のように与えられる。

$$\phi(z) = \frac{V}{d} z$$

電場は、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ から

$$E_z = -\frac{V}{d}$$

となる。